Héctor Jairo Martínez R.
Ana María Sanabria R.

ÁLGEBRA LINEAL

Universidad del Valle
Programa Editorial

Héctor Jairo Martínez R.
Ana María Sanabria R.

ÁLGEBRA LINEAL

Héctor Jairo Martínez R.
Ana María Sanabria R.

ÁLGEBRA LINEAL

Colección Ciencias Naturales y Exactas

Martínez R., Héctor Jairo
Álgebra lineal / Héctor Jairo Martínez R., Ana María
Sanabria R.-- Santiago de Cali : Programa Editorial Universidad del Valle, 2014.
404 p. ; 24 cm.-- (Institucional)
Incluye bibliografía e índice alfabético
1.Álgebras lineales 2. Ecuaciones lineales 3.Espacios
Vectoriales I. Sanabria R., Ana María I.Tít. II. Serie.
512.5 cd 21 ed.
A1434465

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle
Programa Editorial

Título: *Álgebra lineal*
Autor: *Héctor Jairo Martínez R. & Ana María Sanabria R.*
ISBN: 978-958-765-094-5
Colección: Ciencias Naturales y Exactas
Primera edición

Rector de la Universidad del Valle: Iván Enrique Ramos Calderón
Vicerrectora de Investigaciones: Angela María Franco Calderón
Director del Programa Editorial: Francisco Ramírez Potes

© Universidad del Valle
© Héctor Jairo Martínez R. & Ana María Sanabria R.

Diagramación: Juan Carlos Pérez Méndez
Diseño de Carátula: Hugo Nievas
Impreso en: Unidad de Artes Gráficas - Facultad de Humanidades

Universidad del Valle
Ciudad Universitaria, Meléndez
A.A. 025360
Cali, Colombia
Teléfono: (+57)(2) 321 22 27-Telefax: (+57)(2) 330 88 77
editorial@univalle.edu.co

Este libro, o parte de él, no puede ser reproducido por ningún medio sin autorización escrita de la Universidad del Valle.
El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad del Valle, ni genera su responsabilidad frente a terceros. El autor asume la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

Cali, Colombia - Enero de 2014

CONTENIDO

Prólogo xi

Agradecimientos xv

1. Sistemas de ecuaciones lineales **1**
1.1. Introducción 1
1.2. Conceptos básicos 2
1.3. Representación matricial 10
1.4. Eliminación de Gauss 13
1.5. Solución simultánea de sistemas 29
1.6. Ejercicios 32

2. Vectores de $\mathbb{R}^n$ **45**
2.1. Introducción 45
2.2. Conceptos básicos 45
2.3. Operaciones con vectores 49
2.4. Combinación lineal y conjuntos generado y generador . 53
2.5. Producto $A\mathbf{x}$ 58
2.6. Independencia lineal 65
2.7. Producto escalar 68
2.8. Rectas, planos e hiperplanos 82
2.9. Ejercicios 116

3. Matrices **139**
3.1. Introducción 139
3.2. Definición y tipo de matrices 140
3.3. Suma y producto por escalar de matrices 142
3.4. Producto de matrices 146
3.5. Matrices invertibles 153

3.6. Transposición de matrices 161
3.7. Matrices elementales 164
3.8. Factorización LU 171
3.9. Determinantes 180
3.10. Ejercicios 199

4. Espacios vectoriales **211**
4.1. Introducción 211
4.2. Definición y propiedades básicas 212
4.3. Subespacio vectorial 217
4.4. Conceptos básicos 219
4.5. Bases y dimensión 231
4.6. Coordenadas respecto a una base ordenada. 240
4.7. Rango y nulidad de una matriz 252
4.8. Producto escalar y bases ortonormales en $\mathbb{R}^n$ 263
4.9. Proyección ortogonal 269
4.10. Factorización QR 277
4.11. Ejercicios 281

5. Transformaciones lineales **295**
5.1. Introducción 295
5.2. Definición y propiedades básicas 296
5.3. Espacios vectoriales asociados a una transformación lineal 305
5.4. Matriz asociada a una transformación lineal 308
5.5. Isomorfismos 318
5.6. Algebra de transformaciones lineales 326
5.7. Ejercicios 336

6. Valores y vectores propios **345**
6.1. Introducción 345
6.2. Conceptos básicos 346
6.3. Caracterización de valores y vectores propios 353
6.4. Independencia de los vectores propios 356
6.5. Propiedades de las matrices semejantes 362
6.6. Valores y vectores propios de una transformación lineal 364
6.7. Matrices diagonalizables 368
6.8. Matrices simétricas y diagonalización 375
6.9. Ejercicios 380

A. Factorización PLU **387**
A.1. Introducción 387
A.2. Existencia y cálculo de la factorización PLU 389

Bibliografía **401**

Índice Alfabético **403**

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Tipos de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 7

2.1. Representación de vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ 48
2.2. Representación de vectores libres iguales 48
2.3. Representación de vectores y vectores libres de $\mathbb{R}^2$ en un sistema de coordenadas 49
2.4. Suma de vectores libres 50
2.5. Producto por escalar de vectores libres 51
2.6. Resta de vectores libres 52
2.7. Norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ 71
2.8. Ángulo entre vectores 75
2.9. Triángulo formado por dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ . . 76
2.10. Tipos de ángulos entre vectores 78
2.11. Proyección ortogonal de un vector sobre otro vector . . 78
2.12. Proyección ortogonal y componente vectorial ortogonal 80
2.13. Recta con vector director $\mathbf{d}$ que contiene el punto P . . 82
2.14. Rectas paralelas 86
2.15. Rectas ortogonales 89
2.16. Plano con vectores directores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ que contiene a P . 92
2.17. Plano que contiene tres puntos dados 96
2.18. Planos paralelos 97
2.19. Recta y plano paralelos 99
2.20. Recta y plano ortogonales 102
2.21. Orientación de una sistema de coordenadas 108
2.22. Dirección y sentido del producto vectorial 108
2.23. Área de un paralelogramo 110
2.24. Volumen de un paralelepípedo $[V = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]$ 111
2.25. Equivalencia entre planos e hiperplanos en $\mathbb{R}^3$ 112
2.26. Paralelismo y ortogonalidad de planos en $\mathbb{R}^3$ 114
2.27. Paralelismo y ortogonalidad de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. 115

4.1. Representación esquemática de la matriz de transición de una base a otra 249
4.2. Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio ($\mathbf{v} = Proy_S\mathbf{u}$) 271
4.3. Casos especiales de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio 272

5.1. Representación de una función 295
5.2. Representación de una transformación lineal 296
5.3. Reflexión a través del Eje X en el plano 301
5.4. Representación del núcleo de una transformación lineal 305
5.5. Representación de la imagen de una transformación lineal306
5.6. Rotación de 90^o en el plano ($\mathbb{R}^2$) 310
5.7. Caracterización de la matriz asociada a una transformación lineal 311
5.8. Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas ($dim\, V = n$ y $dim\, W = m$) 313
5.9. Relación entre dos matrices asociadas a una transformación lineal 316
5.10. Esquema de una transformación lineal inyectiva y de una **no** inyectiva 319
5.11. Caracterización de una transformación lineal inyectiva . 320
5.12. Esquema de una transformación lineal sobreyectiva y de una **no** sobreyectiva 321
5.13. Esquema de un isomorfismo y de espacios isomorfos . . 323
5.14. Esquema de transformaciones lineales que no son isomorfismos 324
5.15. Representación de la suma y el producto por escalar de transformaciones lineales 326
5.16. Representación de la composición de transformaciones lineales 329
5.17. Representación de la transformación lineal inversa . . . 333

6.1. Representación de los vectores y valores propios de una transformación lineal en el plano ($\mathbb{R}^2$) 346
6.2. Efectos geométricos de una transformación lineal en la dirección de uno de sus vectores propios 347
6.3. Vectores y valores propios de la reflexión a través del eje Y en el plano 364

6.4. Rotación de 30º alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$ 367
6.5. Rotación de 30º alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$ de los vectores canónicos $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ 367

PRÓLOGO

El álgebra lineal es una parte fundamental de la herramienta matemática que se requiere para afrontar el estudio de las ciencias naturales y físicas, de las ciencias del comportamiento, de la ingeniería, de la economía, de la computación, y por supuesto, de las matemáticas puras y aplicadas. Su importancia se hace más evidente en las aplicaciones de las matemáticas y, aún más, con la presencia de los computadores. La gran mayoría de los algoritmos computacionales de áreas como optimización, ecuaciones diferenciales, aproximación de funciones, entre otras, requieren de la solución directa o indirecta de uno o más problemas de álgebra lineal. Son estas razones por lo cual, en una gran cantidad de programas académicos, el álgebra lineal es una asignatura del currículo. El contenido básico de estos cursos es la presentación de los conceptos fundamentales del álgebra lineal y su caracterización teórica, aunque algunos de ellos hacen referencia a aplicaciones específicas que se consideran de dominio público.

Desafortunadamente, en los textos de Algebra Lineal revisados por nosotros, se hace un énfasis "**computacional**" en la presentación de la teoría y la notación, restándole incluso importancia a los conceptos mismos. Además, los conceptos son presentados como herramientas de cálculo, con el agravante que no se hace referencia al verdadero aspecto computacional y numérico de los algoritmos, corriendo el riesgo de desorientar al lector debido a que se le deja la idea errónea de saber cómo "**computar**" las soluciones de los problemas mencionados.

Hemos hecho el esfuerzo de escribir un texto que contenga, por lo menos, los temas a tratar en los cursos de Algebra Lineal de los ciclos de fundamentación, indicando claramente cuáles son los conceptos, sus caracterizaciones y relaciones matemáticas, acompañados de comentarios explícitos sobre la eficiencia y conveniencia de dicha carac-

terización como algoritmos de computo. Intencionalmente, no hemos incluido aplicaciones de la teoría presentada ya que para su verdadera comprensión se requiere el conocimiento básico del área de aplicación; en un futuro cercano, esperamos complementar este texto con un compendio de aplicaciones a las cuales se pueda hacer referencia o que puedan ser usadas, a discreción del docente, en la enseñanza de los cursos de Algebra lineal. Por el contenido y la metodología, para lograr una adecuada comprensión del texto, es necesario conocer tanto el álgebra de los números reales, como la teoría básica de conjuntos y de funciones.

Este texto está compuesto de seis capítulos, los cuales incluyen 84 definiciones, 103 teoremas, 212 ejemplos, 53 gráficos o esquemas ilustrativos y 274 ejercicios presentados al final de cada capítulo. Al principio de cada sección de ejercicios, se sugiere una revisión de los conceptos nuevos presentados en el respectivo capítulo, para lo cual se presenta una lista de los conceptos. Las definiciones, teoremas y corolarios han sido resaltados en recuadros grises. Cada una de las definiciones presentadas tiene una justificación o motivación previa y uno o más ejemplos posteriores, para una mejor comprensión de ellas. Igualmente, la mayoría de los resultados consignados en Teoremas y Corolarios han sido justificados o deducidos previamente e ilustrados con ejemplos. Los ejercicios han sido pensados y seleccionados, de tal forma que ayuden al estudiante a conceptualizar y a entender mejor los resultados y las relaciones entre ellos. En cada sección de ejercicios, incluimos un buen número de preguntas de falso o verdadero, cuyo propósito es hacer que el estudiante revise la teoría, interrelacione los conceptos y construya así su propio conocimiento.

La numeración de las definiciones, teoremas, ejemplos y ejercicios son consecutivas e independientes entre si, empezando con el numeral uno (1) dentro de cada capítulo. Cada corolario incluye en su número, el número del teorema al cual está asociado. Así por ejemplo, el *Corolario 19.2* es el segundo corolario asociado al *Teorema 19*. Además, para facilitar la revisión de las secciones, definiciones, teoremas, corolarios, ejemplos y ejercicios, aparece el número de la página donde se encuentra dentro del texto, cuando se hace referencia a un item particular de ellos.

Iniciamos este texto con la presentación de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que, además de ser un objeto matemático conocido por los estudiantes, son una herramienta importante para el análisis

y el manejo de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal que abordamos en los demás capítulos. En este primer capítulo, presentamos una técnica para resolver los sistemas, haciendo primero énfasis en la determinación de si tiene o no solución y, cuando la tiene, si ésta es única o no, sin necesidad de calcularla. La técnica que utilizamos, por su fácil comprensión, es la clásica *eliminación de Gauss* seguida de una *sustitución hacia atrás*, basada en las operaciones elementales, que muy intuitivamente se pueden ver como operaciones entre ecuaciones.

El planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales es un problema básico e importante de la Matemática, al igual que el diseño de métodos eficientes de solución . Ambos problemas, muy relacionados con el desarrollo del Álgebra Lineal, son el objeto de estudios de cursos como *Modelamiento Matemático*, el primero, y *Análisis Numérico*, el segundo; por lo tanto, no serán tratados en este texto.

En el segundo capítulo, formalizamos uno de los conceptos matemáticos que intuitivamente utilizamos en el capítulo anterior: estudiamos las n-úplas como vectores de $\mathbb{R}^n$, las principales operaciones entre ellos y sus aplicaciones e interpretaciones geométricas: asociadas con un sistema de coordenadas o como vectores libres, particularizando a los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Aprovechando estas operaciones y sus propiedades algebraicas, presentamos los conceptos básicos de la geometría analítica (rectas, planos, hiperplanos, proyección, ángulo, paralelismo y ortogonalidad) e introducimos los conceptos fundamentales del álgebra lineal (combinación lineal, independencia lineal, conjunto generado y conjunto generador) como base para su estudio general en el capítulo de Espacios Vectoriales.

En el Capítulo 3, retomamos la definición dada de matriz en el primer capítulo, para estudiar las operaciones algebraicas entre ellas (suma, multiplicación por escalar, producto, transpuesta y determinantes), sus propiedades básicas y los principales tipos de matrices que brindan las aplicaciones más comunes de este objeto matemático. Como una aplicación inmediata de la teoría de matrices, presentamos una formulación matricial del algoritmo de eliminación de Gauss y su estrecha relación con la llamada factorización LU de una matriz (complementada con la factorización PLU como apéndice), la cual es la base del desarrollo de los algoritmos computacionales modernos para resolver eficientemente sistemas de ecuaciones lineales y que son objeto de estudio en cursos como Análisis Numérico o Álgebra Lineal Numérica.

En el cuarto capítulo, aprovechando la similitud encontrada en las propiedades de las operaciones básicas (suma y producto por escalar) de los vectores de $\mathbb{R}^n$ y las matrices, introducimos el concepto de *Espacio Vectorial*, con el fin de analizar, en forma general, las consecuencias o ventajas de tener un conjunto con estas dos operaciones, sin tener que demostrarlas para cada caso particular. Centramos nuestra atención en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita, donde los escalares son números reales *(espacios vectoriales reales finitos)*, ya que estos nos permiten visualizar una amplia gama de conjuntos dotados con este tipo de operaciones como si fuera el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, para un n en particular. Para demostrar la existencia de bases ortonormales en cualquier espacio vectorial no trivial (Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt), generalizamos, a conjuntos y a subespacios, tanto la noción de ortogonalidad como la proyección ortogonal presentada en el Capítulo 2.

En el Capítulo 5, presentamos las transformaciones lineales como funciones que establecen "*compatibilidad*" entre espacios vectoriales y las operaciones de suma y producto por escalar definidas en cada uno de ellos; es decir, que la imagen de una suma de vectores es la suma de las imágenes y que la imagen de un producto por escalar de un vector es también un producto por escalar de la imagen del vector. En este capítulo, estudiamos las principales propiedades de este tipo especial de funciones y sus relaciones con las matrices hasta llegar a los conceptos de isomorfismo y de espacios isomorfos, lo cual formaliza la importancia de conocer y manejar muy bien el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ presentado en el Capítulo 2.

Por último, en el Capítulo 6, nos concentramos en los denominados valores y vectores propios, fundamentales en el análisis de las transformaciones lineales de un espacio vectorial en si mismo. Por la relación entre las transformaciones y las matrices que presentamos en el capítulo anterior, estudiamos los valores y vectores propios de una transformación como una característica de las matrices asociadas a ellas.

Recordemos que los valores y vectores propios son muy importantes en el estudio de ecuaciones diferenciales en general, y en el análisis de los sistemas dinámicos, tanto discretos como continuos, en particular. En la práctica, los valores y vectores propios suministran información crítica en el diseño de ingeniería y en diversas aplicaciones de la física y la química [11], [14].

AGRADECIMIENTOS

El texto que tenemos en las manos es el producto de muchas discusiones, a través de varios años, con nuestros colegas del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle. El primer borrador lo tuvimos en el año 2007 y desde entonces, lo hemos utilizado como texto del curso de Algebra Lineal que se ofrece, fundamentalmente, a los estudiantes de los Programas Académicos de Ingeniería, obteniendo innumerables sugerencias tanto de los profesores como de los estudiantes. Estas sugerencias son las que, hoy en día, permiten entregar el material que tenemos. Queremos aprovechar para agradecer a las Jefaturas del Departamento de Matemáticas, en especial al profesor Gonzalo García, que nos han asignado tiempo y recursos para esta labor; al Profesor Diego L. Hoyos, quien muy gentilmente dió la idea original de la carátula del libro; a todos los profesores que durante estos últimos años han utilizado los borradores previos como texto del curso, en especial a los profesores Juan Miguel Velásquez, Olmedo Moreno, Leonel Monroy, Jaime Robledo, Heber Meza, Carlos Alexis Gómez, Humberto Mora y César Andrade y a los asistentes de docencia Dora C. Salazar, Miguel A. Caicedo, Angélica Caicedo, Liliana Posada, Heliana Arias y Horacio Navarro entre otros; también a los profesores Miguel Marmolejo y Manuel Villegas, quienes como evaluadores se tomaron el trabajo de leer un borrador previo y sugerir algunas de las características finales del texto. Igualmente, a todos los estudiantes que nos hicieron llegar sus observaciones y comentarios sobre el borrador que utilizaron cuando tomaron el curso. Finalmente, agradecemos la comprensión y apoyo de nuestros hijos Juliana, Nathalie y Pedro Antonio, pues mucho del tiempo invertido en esta obra se lo quitamos a ellos.

Héctor J. Martínez R. & Ana M. Sanabria R.

Capítulo 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.1. Introducción

Iniciamos este texto con la presentación de los *sistemas de ecuaciones lineales*, ya que son una herramienta importante para el análisis y el manejo de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal que abordaremos en los capítulos posteriores.

Aprovechando el concepto intuitivo que sobre *sistemas de ecuaciones* tiene el lector, motivaremos los conceptos de matriz y de vector de $\mathbb{R}^n$ como una forma de simplificar la escritura, análisis y solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente, presentaremos una técnica para resolverlos, haciendo énfasis en la determinación de si tiene o no solución y cuando la tiene, si ésta es única o no, sin necesidad de calcularla. La técnica que utilizaremos, por su fácil comprensión, es la clásica eliminación de Gauss seguida de una sustitución regresiva, basada en las operaciones elementales, que muy intuitivamente se pueden ver como operaciones entre ecuaciones.

El planteamiento de *sistemas de ecuaciones lineales* es un problema básico e importante de la Matemática, al igual que el diseño de métodos de solución eficientes. Ambos problemas, muy relacionados con el desarrollo del Álgebra Lineal, son el objeto de estudios de cursos como Modelamiento Matemático, el primero, y Análisis Numérico, el segundo; por lo tanto, no serán tratados a profundidad en este texto.

1.2. Conceptos básicos

Para empezar, recordemos qué es una *ecuación* y el significado de *solución* de la misma.

Definición 1 [*Ecuación*]. Una ecuación con incógnitas o variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es una proposición abierta[1] que establece la igualdad entre dos expresiones matemáticas[2].

Ejemplo 1.

1. La proposición
$$3x_1^2 - x_2 = 4x_1 + x_3 \tag{1.1}$$
es una ecuación con variables x_1, x_2, x_3.

2. La proposición
$$x - 2y + 3z + 1 = s + r - 2, \tag{1.2}$$
considerando a s y r como constantes reales (parámetros), es una ecuación con variables x, y, z.

3. La proposición
$$5 - 3 = 2 \tag{1.3}$$
podemos considerarla como una ecuación con cualquier número de variables. Por ejemplo, podemos pensarla con variables x, y, z, w $(0x + 0y^2 + 5 + 0z - 3 = 2 + 0w)$ o podemos pensarla con variables x_1, x_2 $(5 + 0x_1 - 3 = 0x_2 + 2)$.

4. Igualmente, podemos considerar la proposición
$$7 + 3 = 5 \tag{1.4}$$
como una ecuación con variables x_1, x_2, x_3 $(7 + 0x_1^3 + 3 = 5 + 0x_2 + 0x_3)$. □

Definición 2 [*Solución de una ecuación*]. Una solución de una ecuación con variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es una n-upla[3] tal que, al sustituir cada una de las variables de la ecuación por las componentes respectivas de la n-upla, obtenemos una identidad[4]. Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación lo llamamos *conjunto solución*.

[1] Una proposición abierta o funcional es aquella cuyo valor de verdad depende del (de los) valor(es) que tome(n) la(s) variable(s) involucrada(s) en ella.

[2] Como podemos observar en los ejemplos siguientes, las expresiones matemáticas pueden involucrar, explícitamente, todas, algunas o ninguna de las variables; por ello, la necesidad de explicitar las variables de la ecuación, cuando no sea claro del contexto de la ecuación.

Cuando $b = 0$, a la ecuación la denominamos *ecuación lineal homogénea*.

Observemos que la variable pivotal se puede despejar en función de las demás variables. Notemos sin embargo que la variable pivotal no siempre es la única variable que se puede despejar en término de las demás. Esta observación será muy útil tanto para analizar como para calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Dada una ecuación lineal con término independiente b, definimos la *ecuación lineal homogénea asociada* a la ecuación dada, como la ecuación con las mismas variables, de coeficientes iguales y término independiente $b = 0$.

Ejemplo 3. La ecuación

$$2x - y = 7 \tag{1.5}$$

es una ecuación lineal con variables x, y, donde el coeficiente de x es 2, el coeficiente de y es -1, el término independiente es 7, el pivote es 2, la variable pivotal es x y la ecuación lineal homogénea asociada es

$$2x - y = 0.$$

Se puede verificar que (5, 3), (0, -7) y en general todas las duplas de la forma $\left(\dfrac{7+t}{2},\ t\right)$, donde t es un número real, son soluciones de la ecuación original, mientras que (0, 0), (4, 8) y en general todas las duplas de la forma $\left(\dfrac{t}{2},\ t\right)$, donde t es un número real, son soluciones de la ecuación homogénea asociada. Si además, demostramos que dichas duplas son todas las soluciones, podemos concluir que los conjuntos solución de la ecuación (1.5) y la ecuación homogénea asociada son

$$\left\{\left(\frac{7+t}{2},\ t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\left(\frac{t}{2},\ t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\},$$

respectivamente. □

Observemos que el conjunto solución de la ecuación (1.5) también puede ser escrito como

$$\{(u,\ 2u - 7),\ u \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto, al reemplazar x por u y a y por $2u - 7$ en (1.5), obtenemos $2u - (2u - 7) = 2u - 2u + 7 = 7$.

Ahora, si tenemos un número finito de ecuaciones lineales con las mismas variables, podemos agruparlas en lo que llamamos un *sistema de ecuaciones lineales*.

Definición 4 [*Sistema de ecuaciones lineales*]. Un *sistema de m ecuaciones lineales con n variables* $x_1, \cdots, x_n$ (sistema de ecuaciones lineales $m \times n$) es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma[6]

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1.6}$$

El número α_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la ecuación i y b_i es el término independiente de la ecuación i. Cuando **todos** los términos independientes b_i son 0, el sistema lo llamamos *homogéneo*.

Dado un sistema de ecuaciones con términos independientes b_i, se define *el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado* al sistema dado, como el sistema de ecuaciones lineales con las mismas variables, de coeficientes iguales y términos independientes $b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Ejemplo 4. El siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -10 \end{array}$$

es un sistema de 2 ecuaciones lineales con variables x_1, x_2, x_3, donde los coeficientes respectivos de x_1, x_2 y x_3, en la primera ecuación, son 1, 2 y 0; y, en la segunda ecuación, son 2, 3 y -2. Los términos independientes de la primera y segunda ecuación son -3 y -10, respectivamente. El sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

es su sistema homogéneo asociado. □

[6] En general, las variables del sistema aparecen explícitamente en el sistema mismo; cuando aparezcan parámetros o demasiados coeficientes iguales a cero, por claridad, debemos explicitar las variables antes o después de presentar el sistema.

Definición 5 [*Solución de un sistema de ecuaciones lineales*]. Una *solución de un sistema de ecuaciones lineales* con variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es una n-upla que es solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Al conjunto formado por todas las soluciones de un sistema lo llamamos *conjunto solución*.

Ejemplo 5. Podemos verificar que las triplas $(-15, 6, -1)$ y $(4, -2, 1)$ son, respectivamente, soluciones de los sistemas del ejemplo anterior, ya que al hacer los debidos reemplazos, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot(-15) & + & 2\cdot 6 & + & 0\cdot(-1) & = & -3 \\ 2\cdot(-15) & + & 3\cdot 6 & + & -2\cdot(-1) & = & -10 \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcr} -3 & = & -3 \\ -10 & = & -10 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1\cdot 4 & + & 2\cdot(-2) & & & = & 0 \\ 2\cdot 4 & + & 3\cdot(-2) & + & -2\cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcr} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}.$$

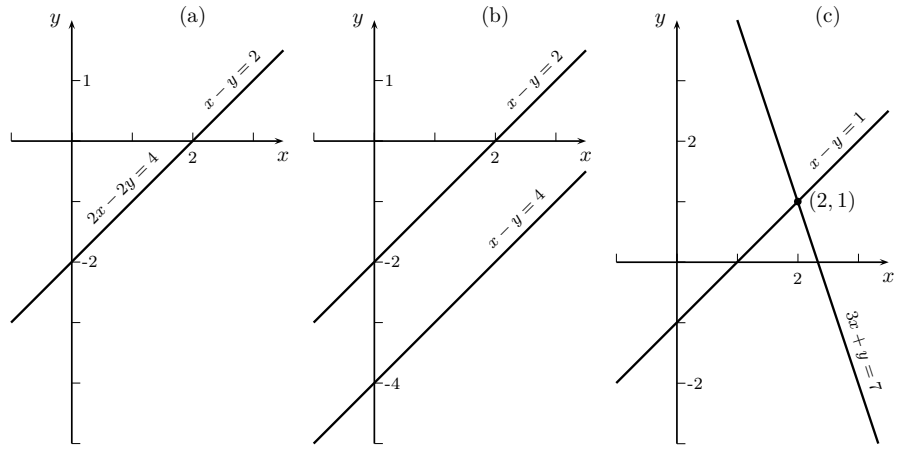
De la misma manera, podemos ver que $(1, -2, 4)$ no es solución del sistema original ya que, aunque es solución de la primera ecuación $(1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -3)$, no es solución de la segunda ecuación $(2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 \neq -10)$. □

Observemos que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre tiene al menos una solución: todas las variables iguales a cero (*solución trivial*).

Desde el punto de vista geométrico, al *conjunto solución* de un sistema de ecuaciones lineales lo podemos interpretar como la intersección de todos los lugares geométricos (rectas, planos o hiperplanos) representados por cada una de las ecuaciones lineales. Por simplicidad, aunque lo ampliaremos más adelante, ilustraremos lo anterior en el caso de dos ecuaciones con dos variables.

Ejemplo 6. Los siguientes tres conjuntos de ecuaciones son sistemas de dos ecuaciones con variables x, y. Veamos que el número de soluciones de cada uno de ellos es completamente diferente.

$$\text{(a)}\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 4 \end{array} \qquad \text{(b)}\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 4 \end{array} \qquad \text{(c)}\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ 3x & + & y & = & 7 \end{array}$$



Conjunto solución *infinito* — Conjunto solución *vacío* — Conjunto solución *unitario*

Figura 1.1: Tipos de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2

Observemos que, en el sistema(a), la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2, de tal manera que las soluciones de las dos ecuaciones son las mismas. De otro lado, es fácil verificar que toda dupla de la forma $(r + 2, r)$, donde r es cualquier número real, es solución de este sistema y que por tanto, el sistema tiene *infinitas soluciones (Conjunto solución infinito)*. Geométricamente, podemos ver que cada una de las ecuaciones del sistema corresponde a la ecuación de una misma recta en el plano, así que las coordenadas de todos los puntos de dicha recta son las soluciones del sistema (Fig. 1.1 (a)).

Respecto al sistema (b), podemos ver que *no tiene solución* ya que no hay dos números que restados sean iguales a 2 y 4, simultáneamente *(Conjunto solución vacío)* . Geométricamente, se puede verificar que las ecuaciones del sistema corresponden a las ecuaciones de dos rectas paralelas, así que no hay un punto común a ellas y por tanto, no hay una dupla que sea solución del sistema (Fig. 1.1 (b)).

Y, respecto al sistema (c), podemos ver que la dupla $(2, 1)$ es solución del sistema y que además es la *única solución (Conjunto solución unitario)*. Geométricamente, las ecuaciones del sistema corresponden a las ecuaciones de dos rectas no paralelas en el plano; por tanto, se cortan en un sólo punto: $(2, 1)$ (Fig. 1.1 (c)). □

En este ejemplo, se ilustran las únicas tres posibilidades del número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales: infinitas (a), ninguna(b) y sólo una(c), como lo formalizaremos más adelante. Por lo pronto, diferenciemos muy bien aquellos sistemas que tienen al menos una solución de aquellos que no tienen solución.

Definición 6 [*Sistema de ecuaciones lineales consistente*]. A un sistema de ecuaciones lo denominamos *consistente* si tiene al menos una solución. En caso contrario, al sistema lo denominamos *inconsistente*.

En el Ejemplo 6, tenemos que los sistemas (a) y (c) son consistentes, mientras que el sistema (b) es inconsistente. Además, podemos afirmar que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente (¿Por qué?) y que el conjunto solución de un sistema inconsistente es el conjunto vacío.

Para determinar el número de soluciones y/o encontrar las soluciones de un sistema, recurriremos, como lo ilustraremos más adelante, a sistemas que tienen las mismas soluciones y que son más fácil de analizar y de resolver, para lo cual introducimos la siguiente definición.

Definición 7 [*Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes*]. Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes*, si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 7. Observemos que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales 2×2 son equivalentes.

$$(a)\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \end{array} \qquad\qquad (b)\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

ya que ambos tienen como única solución $(2, 1)$. □

De otro lado, es fácil ver que los sistemas que tienen el "patrón escalonado" del sistema (b) del Ejemplo 7, son fáciles de resolver. En efecto, si comenzamos resolviendo la última ecuación y luego sustituimos el valor encontrado en la ecuación anterior y resolvemos la ecuación resultante, obtenemos la solución del sistema; es decir,

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ x - 1 &= 1 \text{ de donde, } x = 2. \end{aligned}$$

El procedimiento empleado para resolver este último sistema se conoce como *sustitución hacia atrás* y la idea básica para resolver un sistema

cualquiera consiste en "transformar" el sistema dado en otro equivalente que tenga el "patrón escalonado", el cual como ya dijimos, será más fácil de resolver. Esta idea es lo que en el bachillerato llamábamos método de reducción o eliminación. Veamos un ejemplo de solución mediante esta idea básica, la cual formalizaremos en la Sección 1.4.

Ejemplo 8. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales 3×3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 16 \\ 2x & - & y & + & z & = & 9. \end{array} \tag{1.7}$$

Restándole, a la segunda ecuación, 3 veces la primera ecuación para eliminar la variable x de la segunda ecuación, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ & & & & 5z & = & 10 \\ 2x & - & y & + & z & = & 9. \end{array} \tag{1.8}$$

Restándole, a la tercera ecuación, 2 veces la primera ecuación para eliminar la variable x de la tercera ecuación, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ & & & & 5z & = & 10 \\ & & y & + & 3z & = & 5. \end{array} \tag{1.9}$$

Intercambiando la segunda y la tercera ecuación, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 5z & = & 10, \end{array} \tag{1.10}$$

el cual tiene un "patrón escalonado", que hace fácil encontrar la solución mediante el método de sustitución hacia atrás: De la última ecuación, $z = 2$. Sustituyendo el valor de z en la ecuación inmediatamente anterior, es fácil ver que $y = -1$; y sustituyendo los valores de y y z en la ecuación inmediatamente anterior a ésta última, tenemos que $x = 3$. □

Los procedimientos que hicimos para pasar de un sistema a otro, nos permiten ver que las soluciones del sistema inicial son también solución de cada uno de los otros sistemas. Puesto que los pasos que efectuamos son reversibles, podríamos iniciar el proceso en el sistema final y pasando por cada uno de los otros sistemas llegar al sistema

inicial. Así, cualquier solución del sistema final es también solución de los otros sistemas y en particular, del sistema inicial.

Observemos que, en el sistema (1.10), el cual tiene el "patrón escalonado", la variable pivotal de cada ecuación es diferente, lo cual permite obtener la solución del sistema mediante la sustitución hacia atrás.

Volviendo a los procedimientos para pasar de un sistema a otro equivalente, debemos anotar que sólo utilizamos dos tipos de operaciones entre ecuaciones de los tres tipos que definimos a continuación.

Definición 8 [*Operaciones elementales entre ecuaciones*]. Dado un sistema de ecuaciones lineales, llamamos *operaciones elementales entre ecuaciones* a cada uno de las siguientes procedimientos:

1. *Escalamiento.* Reemplazar la ecuación i, E_i, por un múltiplo de ésta, cE_i, $c \neq 0$: $cE_i \longrightarrow E_i$.
2. *Eliminación.* Reemplazar la ecuación i, E_i, por la suma de ésta con un múltiplo de otra, cE_j: $E_i + cE_j \longrightarrow E_i$.
3. *Permutación.* Intercambiar las ecuaciones i y j, E_i y E_j: $E_i \longleftrightarrow E_j$.

Con esta notación, tenemos que, en el Ejemplo 8, las operaciones elementales que efectuamos para pasar del sistema (1.7) al sistema (1.8), del sistema (1.8) al sistema (1.9) y del sistema (1.9) al sistema (1.10) son $E_2 - 3E_1 \longrightarrow E_2$, $E_3 - 2E_1 \longrightarrow E_3$, y $E_2 \longleftrightarrow E_3$, respectivamente. Así, podemos observar que después de efectuar sucesivamente estas operaciones elementales a un sistema, se llega a otro equivalente.

1.3. Representación matricial

Observemos que los sistemas de ecuaciones lineales se caracterizan por el valor de los coeficientes de sus variables y los términos independientes, de manera que, para empezar, podemos ahorrarnos la escritura repetitiva de las variables. Para tal efecto, llamamos *matriz de coeficientes del sistema* (o simplemente, *matriz del sistema*) al arreglo rectangular de números formado por los coeficientes de las variables, de tal forma que cada *fila* corresponda a una ecuación y cada *columna* a una variable, y *matriz aumentada del sistema*, al arreglo rectangular de números formado por la matriz del sistema y una columna adicional conformada por los términos independientes. De esta

forma, la matriz de un sistema con m ecuaciones y n variables tendrá m filas y n columnas, lo cual denotamos diciendo que el tamaño de la matriz es $m \times n$. Así, la matriz del sistema y la matriz aumentada del sistema del Ejemplo 4 son, respectivamente, las matrices de tamaño 2×3 y 2×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right),$$

y en general, la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales (1.6) son

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right)^{7}.$$

Como la matriz aumentada de un sistema es una representación abreviada de éste, diremos que el pivote de una fila de una matriz es el primer elemento de la fila, de izquierda a derecha, que es diferente de cero[8] y que las operaciones elementales entre ecuaciones se pueden interpretar como operaciones entre filas en esta matriz.

Definición 9 [*Operaciones elementales entre filas*]. Dada una matriz, llamamos *operaciones elementales entre filas* a cada una de los siguientes procedimientos:

1. *Escalamiento.* Reemplazar la fila i, F_i, por un múltiplo de ésta, cF_i, $c \neq 0$: $cF_i \longrightarrow F_i$.
2. *Eliminación.* Reemplazar la fila i, F_i, por la suma de ésta con un múltiplo de otra, cF_j: $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$.
3. *Permutación.* Intercambiar las filas i y j, F_i y F_j: $F_i \longleftrightarrow F_j$.

En el Ejemplo 8, los procedimientos efectuados para pasar de un sistema a otro, quedan representados por la siguientes matrices aumen-

[7] Por notación, en la matriz aumentada, así no aparezca la línea vertical, la última columna corresponde a los términos independientes del sistema.

[8] Observemos que aunque en una ecuación lineal el término independiente no puede ser pivote, con esta extensión del concepto de pivote, en una matriz aumentada, el término independiente si podría ser pivote.

tadas y operaciones elementales entre filas:

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right) \\ F_2 - 3F_1 \longrightarrow F_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right) \\ F_3 - 2F_1 \longrightarrow F_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \\ F_2 \longleftrightarrow F_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right). \end{array} \tag{1.11}$$

Como estas matrices representan *sistemas de ecuaciones lineales equivalentes* y fueron obtenidas mediante operaciones elementales entre filas, tenemos una motivación para la siguiente definición.

Definición 10 [*Matrices equivalentes*]. Decimos que dos matrices son *equivalentes* si al efectuar operaciones elementales entre filas a una de ellas, se obtiene la otra.

Ejemplo 9. Las matrices $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right)$ y $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$ son equivalentes, ya que como vimos en (1.11), al aplicar sucesivamente las operaciones elementales $F_2 - 3F_1 \longrightarrow F_2$, $F_3 - 2F_1 \longrightarrow F_3$ y $F_2 \longleftrightarrow F_3$ a la matriz $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right)$, se obtiene la matriz $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$. □

1.4. Eliminación de Gauss

En esta sección, examinaremos con más detalle el método que utilizamos para resolver el sistema de ecuaciones lineales (1.7), el cual es un método sistemático y directo[9] para resolver un sistema de ecuaciones lineales. La idea consiste en llevar la matriz aumentada del sistema dado a otra equivalente con "patrón escalonado", que corresponda a un sistema que pueda ser resuelto por medio de sustitución hacia atrás.

Empezaremos formalizando lo que hemos llamado "patrón escalonado", definiendo lo que se conoce como matriz escalonada, ya que un sistema de ecuaciones lineales con dicho patrón tiene como matriz aumentada una matriz escalonada.

Definición 11 [*Matriz escalonada*]. Decimos que una matriz es *escalonada* si tiene las siguientes características:

1. Cualquier fila cuyas *componentes* sean todas cero, se encuentra en la parte inferior de la matriz.
2. En cada fila cuyas *componentes* no sean todas cero, el *pivote* se encuentra en una columna que está a la derecha de la columna del *pivote* de la fila anterior (equivalentemente, podemos decir que cada pivote está a la izquierda del pivote de la fila siguiente).

Observemos que, en una matriz escalonada, cada fila tiene un pivote o todas sus componentes son cero; además, ninguna columna tiene más de un pivote. Este hecho nos permite clasificar sus columnas como *pivotales* y *no pivotales*, según tengan o no pivote, respectivamente.

Ejemplo 10. Determinemos cuáles de las siguientes matrices son matrices escalonadas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{6} & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1/3} & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

[9] Decimos que el método es directo porque, en un número finito de operaciones, se obtiene el conjunto solución del sistema.

Observemos que las dos primeras no son matrices escalonadas y que el resto sí lo son. En efecto, en la primera matriz, aunque las filas de ceros están en la parte inferior, el pivote de la primera fila está en una columna a la derecha de la columna donde está el pivote de la segunda fila; y, en la segunda matriz, hay una fila de ceros que no está en la parte inferior de la matriz. En la tercera matriz, sus pivotes son **1**, **6** y **-1/3** y sus columnas pivotales son la primera, la segunda y la tercera; en la cuarta matriz, sus pivotes son **1**, **2** y **-5** y sus columnas pivotales son la segunda, la tercera y la quinta; en la quinta matriz, su pivote es **-2** y en la ultima es **3**, y sus columnas pivotales son la primera y la tercera, respectivamente. □

Un método eficiente y de uso frecuente para reducir una matriz dada a una matriz escalonada equivalente es el conocido como método de eliminación de Gauss.

ALGORITMO 1

Método de Eliminación de Gauss

Objetivo: *Escalonar una matriz; es decir, dada una matriz, encontrar una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.*

Paso 1 Identifique la primera columna, de izquierda a derecha, que no sea de sólo ceros.

Paso 2 Si la primera componente de esta columna es un cero, intercambie la primera fila con una que tenga una componente no cero en esta columna. Esta componente no cero corresponde al pivote de esta columna.

Paso 3 Usando la fila del pivote, aplique operaciones elementales adecuadas del Tipo Eliminación, sucesivamente, para obtener ceros debajo del pivote de esta columna.

Paso 4 Repítale este procedimiento, comenzando con el Paso 1, al conjunto de filas de la matriz resultante del paso anterior que están por debajo de la fila donde está el pivote anterior, hasta agotar las filas o hasta que las filas restantes sean de sólo ceros.

Ejemplo 11. Aplicando el Método de Eliminación de Gauss, encontremos una matriz escalonada equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -9/2 \\ 0 & 2 & -2/3 & -1 \\ 6 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Como la primera columna de izquierda a derecha que no es de sólo ceros es la primera columna de la matriz y su primer elemento no es cero, **2** es el pivote y, para obtener ceros debajo de él, realizamos las operaciones elementales entre filas indicadas a continuación

$$\begin{array}{rcl} F_2 - \frac{3}{2}F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ F_4 - 3F_1 & \longrightarrow & F_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -2/3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Repitiendo el mismo procedimiento a las filas 2, 3 y 4 de la matriz anterior y usando como segundo pivote el **3** de la fila 2, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} F_3 - \frac{2}{3}F_2 & \longrightarrow & F_3 \\ F_4 - F_2 & \longrightarrow & F_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Repitiendo nuevamente el mismo procedimiento a las filas 3 y 4 de la matriz anterior y usando como tercer pivote el **3** de la fila 3, obtenemos

$$F_4 + \tfrac{2}{3}F_3 \longrightarrow F_4 \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.

Notemos que la constante c de la operación elemental adecuada tipo eliminación es el opuesto del cociente entre la componente que se quiere anular y el pivote de la respectiva columna. Así, en el primer paso obtuvimos $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{6}{2} = -3$; en el segundo, $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{3} = -1$ y, en el tercero, $-\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$. □

Observemos que el método que se aplicó para reducir la matriz aumentada del sistema (1.7) a una forma escalonada equivalente fue precisamente el método de eliminación de Gauss. Véase (1.11).

Con base en lo anterior, podemos describir la idea de cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales que venimos sugiriendo, así:

ALGORITMO 2

Idea básica para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales

Paso 1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

Paso 2 Aplique el método de eliminación de Gauss para reducir la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada equivalente (Algoritmo 1).

Paso 3 Resuelva el sistema correspondiente a la matriz escalonada por sustitución hacia atrás.

Teniendo en cuenta que, en un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz asociada es una matriz escalonada, cada columna de la matriz tiene sólo un pivote o no tiene, llamamos *variables pivotales del sistema* a las variables del sistema correspondientes a las columnas pivotales de la matriz y *variables libres*[10] a las variables del sistema correspondientes a las columnas no pivotales de la matriz.

Ejemplo 12. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales 3×3

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array} . \tag{1.12}$$

1. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

[10]El nombre de variables libres está justificado en el hecho que, si el sistema es consistente, en su solución, estas variables pueden tomar valores arbitrarios. Además, observemos que los conceptos de variable pivotal y de variable libre de un sistema se definen con base en una matriz escalonada equivalente a la matriz de coeficientes del sistema.

2. Aplicamos el método de eliminación de Gauss a esta matriz:

$$\begin{array}{rcl} F_2 - F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ F_3 - \frac{1}{2}F_1 & \longrightarrow & F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \end{array}\right)$$

$$F_3 + \tfrac{3}{4}F_2 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5/2 & -5 \end{array}\right).$$

Observemos que, en este ejemplo, x_1, x_2 y x_3 son las variables pivotales y que no hay variables libres.

3. Resolvemos el sistema correspondiente a la matriz aumentada escalonada,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & 2x_2 & & & = & 2 \\ & & & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -5 \end{array}$$

Aplicando sustitución hacia atrás

$$x_3 = \frac{-5}{-5/2} = 2, \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1,$$
$$2x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 2 = 0, \qquad x_1 = 0.$$

Así, $(0, 1, 2)$ es la única solución del sistema (1.12). □

Ejemplo 13. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales 3×4

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ 2x & - & 2y & - & z & + & 3w & = & 3 \\ -x & + & y & - & z & & & = & -3 \end{array}. \tag{1.13}$$

1. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

2. Aplicamos el método de eliminación de Gauss a esta matriz:

$$\begin{array}{rcl} F_2 - 2F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ F_3 + F_1 & \longrightarrow & F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que, en este ejemplo, x y z son las *variables pivotales* y que y y w son las *variables libres*.

3. Resolvemos el sistema correspondiente a la matriz aumentada escalonada,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ & & & & z & - & w & = & 1 \end{array}$$

Aplicando sustitución hacia atrás

$$\begin{aligned} z &= 1 + w \\ x &= 1 + y + z - 2w \\ x &= 1 + y + (1 + w) - 2w = 2 + y - w \end{aligned}$$

lo que nos indica que este sistema, y por tanto el sistema (1.13), tiene infinitas soluciones, ya que las variables y y w pueden tomar cualquier valor. En efecto, el conjunto solución del sistema (1.13) es $\{(2 + y - w,\ y,\ 1 + w,\ w) :\ y, w \in \mathbb{R}\}$. □

Ejemplo 14. Ahora, resolvamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al sistema de ecuaciones anterior

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & z & + & 3w & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & & & = & 0 \end{array} . \tag{1.14}$$

1. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. Aplicamos el método de eliminación de Gauss a esta matriz:

$$\begin{array}{rcl} F_2 - 2F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ F_3 + F_1 & \longrightarrow & F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Observemos que, al igual que en el ejemplo anterior, x y z son *variables pivotales* y que y y w son *variables libres*.

3. Resolvemos el sistema correspondiente a la matriz aumentada escalonada,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & + & 2w & = & 0 \\ & & & & z & - & w & = & 0 \end{array}$$

Aplicando sustitución hacia atrás

$$\begin{aligned} z &= w \\ x &= y + z - 2w = y + w - 2w = y - w \end{aligned}$$

lo que nos indica que este sistema, y por tanto el sistema (1.14), tiene infinitas soluciones, y su conjunto solución es $\{(x,\ y,\ z,\ w) : x = y - w,\ z = w,\ y, w \in \mathbb{R}\}$. Recordemos que un conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como éste, lo podemos escribir de otras formas (ver observación sobre el Ejemplo 3, Pág.4). □

Ejemplo 15. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & -1 \end{array}. \tag{1.15}$$

1. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

2. Aplicamos el método de eliminación de Gauss a esta matriz:

$$F_2 - \tfrac{1}{2}F_1 \longrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

   Observemos que, en este ejemplo, a diferencia de los anteriores, la columna de los términos independientes es una columna pivotal.

3. Al escribir el sistema correspondiente a la matriz aumentada escalonada,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & \frac{5}{2}y & - & \frac{5}{2}z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{array}$$

   obtenemos una ecuación que no tiene solución, 0=3, lo que nos indica que este sistema, y por tanto, el sistema (1.15) no tiene solución. □

Analizando detenidamente los últimos 4 ejemplos, obtenemos las siguientes **conclusiones**:

1. [*Determinación de las operaciones elementales*] Las operaciones elementales utilizadas en el método de eliminación de Gauss dependen exclusivamente de la matriz de coeficientes; es decir, los términos independientes no interviene en la determinación de dichas operaciones elementales.

2. [*Sistemas inconsistentes*] Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, una fila tiene su pivote en la columna de los términos independientes, el sistema es inconsistente; o lo que es lo mismo, si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se tiene una fila de ceros en la matriz de los coeficientes y el término independiente de esta fila es diferente de cero, el sistema es inconsistente.

3. [*Sistemas consistentes*] Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, no se obtiene pivote en la columna de los términos independientes, el sistema es consistente; o lo que

es lo mismo, si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, no hay filas de ceros o a todas las filas de ceros en la matriz de los coeficientes les corresponde un término independiente igual a cero, el sistema es consistente.

4. [*Sistemas consistentes para todo término independiente*] Si al escalonar la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, cada fila tiene pivote, el sistema es consistente para cualquier columna de términos independientes.

5. [*Sistemas con infinitas soluciones*] Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se observan menos pivotes que columnas en la matriz de coeficientes y el sistema es consistente, el sistema tiene infinitas soluciones; o lo que es lo mismo, si el sistema es consistente y hay columnas sin pivote (variables libres), el sistema tiene infinitas soluciones.

6. [*Sistemas con solución única*] Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, cada columna de la matriz de los coeficientes tiene pivote y el sistema es consistente, el sistema tiene solución única o lo que es lo mismo, si el sistema es consistente y no hay variables libres, el sistema tiene solución única.

7. [*Sistemas homogéneos*] Al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, nunca habrá pivote en la columna de términos independientes ya que ésta siempre estará conformada por ceros. Por esta razón, para resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, basta escalonar la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales en lugar de hacerlo con la matriz aumentada.

De los ejemplos y las conclusiones anteriores, es claro que para determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene o no solución y cuántas soluciones tiene, en caso de tenerlas, basta con llevar la matriz aumentada del sistema a una forma escalonada equivalente. En otras palabras, la consistencia o inconsistencia de un sistema de ecuaciones lineales y el número de soluciones se determina antes del Paso 3 de la *idea básica para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales* (Algoritmo 2).

De otro lado, es fácil ver que despejar una variable en la sustitución hacia atrás es equivalente a convertir el pivote correspondiente en 1

mediante una operación elemental tipo escalamiento y que sustituir el valor obtenido de una variable en las ecuaciones anteriores es equivalente a introducir ceros arriba del pivote correspondiente mediante una operación elemental tipo eliminación, es decir que resolver un sistema de ecuaciones lineales con *patrón escalonado* mediante sustitución hacia atrás consiste en realizar operaciones elementales adecuadas a la matriz escalonada del sistema de ecuaciones lineales, para "convertir" en uno (1) los pivotes y obtener ceros encima de ellos, como lo indicamos en el siguiente algoritmo.

ALGORITMO 3

Método de sustitución hacia atrás

Objetivo: *Dado un sistema de ecuaciones lineales consistente con "patrón escalonado", encontrar su(s) solución(es).*

Paso 1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales (la cual es una matriz escalonada).

Paso 2 Identifique la columna del primer pivote, de derecha a izquierda (ó la del último pivote, de izquierda a derecha).

Paso 3 Aplique la operación elemental adecuada de Tipo Escalamiento para obtener uno (1) como pivote en esta columna.

Paso 4 Aplique sucesivamente operaciones elementales adecuadas del Tipo Eliminación para obtener ceros (0) encima del pivote de esta columna.

Paso 5 Repítale este procedimiento, comenzando con el Paso 2, al conjunto de filas de la matriz resultante en el paso anterior que están por encima de la fila donde estaba el pivote anterior, hasta agotar las filas.

Paso 6
- Si todas las columnas de la matriz de coeficientes tienen pivote, la única solución del sistema aparecerá en las componentes de la columna de términos independientes correspondientes a las filas que tienen pivotes.
- En caso contrario (hay al menos una variable libre), las infinitas soluciones se obtienen despejando las variables pivotales en términos de las variables libres, lo cual es relativamente fácil.

Ejemplo 16. Usemos el Algoritmo 3 en el Paso 3 del Ejemplo 12.

1. Después de aplicar el método de eliminación de Gauss, obtenemos la matriz escalonada (la cual es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales con "patrón escalonado").

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-5/2} & -5 \end{array}\right)$$

2. El primer pivote, de derecha a izquierda, es $\mathbf{-5/2}$.

3. Obtengamos 1 como pivote, aplicando una operación elemental entre filas de Tipo Escalamiento

$$(-2/5)F_3 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right).$$

4. Obtengamos ceros encima del pivote, aplicando operaciones elementales entre filas de Tipo Eliminación

$$F_1 - F_3 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

5. Repetimos los pasos con las filas por encima del pivote anterior (filas 1 y 2). Obtengamos 1 como pivote, aplicando una operación elemental entre filas de Tipo Escalamiento.

$$(1/2)F_2 \longrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

6. Obtengamos ceros encima del pivote, aplicando operaciones elementales entre filas de Tipo Eliminación

$$F_1 - F_2 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

7. Repetimos los pasos con las filas por encima del pivote anterior (fila 1). Obtengamos 1 como pivote, aplicando una operación elemental entre filas de Tipo Escalamiento.

$$(1/2)F_1 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

8. Finalmente, todas las columnas de la matriz de coeficientes tienen pivote igual a 1, por lo tanto $(0, 1, 2)$ (componentes de la columna de términos independientes correspondientes a las filas con pivotes) es la única solución del sistema (1.12). □

Ejemplo 17. Usemos el método de sustitución hacia atrás (Algoritmo 3) en el Paso 3 del Ejemplo 13.

La matriz aumentada del sistema con "patrón escalonado" es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1. El último pivote, de izquierda a derecha, es **1**. Pasamos directamente al Paso 4 del método de sustitución hacia atrás, y obtenemos

$$F_1 + F_2 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Finalmente, la segunda y cuarta columna no tienen pivote, por lo tanto y, w son variables libres y x, z son variables pivotales, las cuales procedemos a despejar en términos de las anteriores para obtener las infinitas soluciones del sistema (1.13).

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & + & w & = & 2 \\ & & & z & - & w & = & 1 \end{array}$$

Despejando las variables pivotales

$$\begin{aligned} x &= 2 + y - w \\ z &= 1 + w \end{aligned}$$

□

Finalmente, con este método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con patrón escalonado, podemos presentar un algoritmo para la solución de un sistema de ecuaciones lineales, que incluye el método de eliminación de Gauss y el de sustitución hacia atrás.

ALGORITMO 4

Método de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales
(Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás)

Objetivo: *Dado un sistema de ecuaciones lineales, determinar si tiene solución y, en caso de tener, hallar su(s) solución(es).*

Paso 1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

Paso 2 Aplique el método de eliminación de Gauss para reducir la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada equivalente (Algoritmo 1).

Paso 3 Si la columna de términos independientes es pivotal, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución y termina el algoritmo. Si no, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución y continua el algoritmo.

Paso 4 Resuelva el sistema correspondiente a la matriz escalonada usando el método de sustitución hacia atrás (Algoritmo 3).

Una variante muy popularizada del método que acabamos de presentar es el llamado *Método de Gauss-Jordan* que consiste en, una vez ubicado el pivote, convertirlo en uno (1); luego, introducir ceros debajo del pivote y después introducir ceros encima de él, para cada columna pivotal. En otras palabras, este método sigue los pasos de los métodos de eliminación de Gauss y de sustitución hacia atrás **entremezclados**, el cual podemos resumir como sigue, teniendo en cuenta que, en general, este método no es mejor que el planteado anteriormente, aunque produce los mismos resultados [11].

[11] Frecuentemente, este algoritmo es utilizado para calcular la matriz escalonada equivalente cuyas columnas pivotales tienen como componentes sólo ceros excepto el pivote que es uno, la cual es llamada *matriz escalonada reducida [7] [16].*

ALGORITMO 5

Otro método de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales (Gauss-Jordan)

Objetivo: *Dado un sistema de ecuaciones lineales, determinar si tiene solución y, en caso de tenerla, hallar su(s) solución(es).*

Paso 1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

Paso 2 Identifique la primera columna, de izquierda a derecha, que no sea de sólo ceros.

Paso 3 Si la primera componente de esta columna es un cero, intercambie la primera fila con una que tenga una componente no cero en esta columna. Esta componente no cero será el *pivote* de esta columna.

Paso 4 Aplique la operación elemental adecuada de Tipo Escalamiento para convertir en uno (1) el pivote del paso anterior.

Paso 5 Aplique sucesivamente operaciones elementales adecuadas de Tipo Eliminación, para obtener ceros debajo del pivote de esta columna.

Paso 6 Aplique sucesivamente operaciones elementales adecuadas de Tipo Eliminación para obtener ceros encima del pivote de esta columna.

Paso 7 Repítale los Pasos 2, 3, 4 y 5, a las filas que se encuentran por debajo de la fila donde estaba el pivote anterior, y el Paso 6 a las filas por encima del nuevo pivote, hasta agotar las filas o hasta que las filas por debajo de la fila donde estaba el pivote anterior sean de sólo ceros.

Paso 8 Si la columna de términos independientes es pivotal, el sistema de ecuaciones no tiene solución y el algoritmo termina. Si no, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

- Si todas las columnas de la matriz de coeficientes tienen pivote, la solución es única y aparecerá en las componentes de la columna de términos independientes correspondientes a las filas que tienen pivotes.
- En caso contrario (hay al menos una variable libre), el sistema tiene infinitas soluciones y se obtiene despejando las variables pivotales en términos de las variables libres, lo cual es relativamente fácil.

Aunque evidentemente, por este método también se llega a la solución del sistema, el alterar el orden de los pasos del método de solución propuesto en el Algoritmo 4 (Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás), hace que el Algoritmo 5 (Gauss-Jordan) sea ineficiente, puesto que aumenta el número de operaciones, casi al doble [6] [7] [16]. Además, cuando el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, se realizan muchas operaciones innecesarias antes de determinar esta situación. Es de anotar, que la computación (y/o programación) en paralelo elimina esta ineficiencia, ya que muchas de estas operaciones se pueden hacer simultáneamente produciendo un ahorro en el tiempo total de computo.

Ejemplo 18. Usando el Método de Gauss-Jordan (Algoritmo 5), resolvamos el sistema de ecuaciones lineales del Ejemplo 12

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -5. \end{array} \tag{1.16}$$

1. Escribimos la matriz aumentada de este sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{2} & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

2. La primer columna, de izquierda a derecha, diferente de cero es la Columna 1.

3. El primer pivote es **2**, por lo tanto no necesitamos el Paso 3 del Algoritmo 5. Obtenemos uno (1) como pivote aplicando una operación elemental entre filas de Tipo Escalamiento

$$(1/2)F_1 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

4. Obtenemos ceros debajo del pivote, aplicando operaciones elementales entre filas Tipo Eliminación

$$\begin{array}{rcl} F_2 - 2F_1 & \longrightarrow & F_2 \\ F_3 - F_1 & \longrightarrow & F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 2 \\ 0 & -1{,}5 & -2{,}5 & -6{,}5 \end{array}\right)$$

5. Como es el primer pivote, no necesitamos el Paso 6 del Algoritmo 5. Repetimos los Pasos 2, 3, 4 y 5 del Algoritmo 5 a las filas debajo del pivote anterior (Filas 2 y 3) y el Paso 6 a las filas encima del nuevo pivote. Encontramos que el pivote es nuevamente **2**, por lo tanto, obtenemos uno (1) como pivote aplicando una operación elemental entre filas de Tipo Escalamiento

$$(1/2)F_2 \longrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & -1{,}5 & -2{,}5 & -6{,}5 \end{array}\right)$$

6. Obtenemos ceros debajo y encima del pivote, aplicando operaciones elementales entre filas Tipo Eliminación

$$\begin{array}{rcl} F_3 + 1{,}5F_2 & \longrightarrow & F_3 \\ F_1 - 0{,}5F_2 & \longrightarrow & F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2.5} & -5 \end{array}\right)$$

7. Repetimos los Pasos 2 y 3 del Algoritmo 5 con las filas debajo del pivote anterior (Fila 3) y encontramos que el pivote es **-2.5**, por lo tanto, aplicamos operación elemental entre filas Tipo Escalamiento para obtener **1** como pivote

$$(-1/2{,}5)F_3 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

8. Como es la última fila, sólo necesitamos obtener ceros encima del pivote, aplicando operaciones elementales entre filas Tipo Eliminación

$$F_1 - 0{,}5F_3 \longrightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

9. Finalmente, todas las columnas de la matriz de coeficientes tienen pivote, por lo tanto, $(0, 1, 2)$ (componentes de la columna de términos independientes correspondientes a las filas con pivotes) es la única solución del sistema. □

1.5. Solución simultánea de sistemas

Para terminar este capítulo, veamos que, cuando se requiere resolver dos ó más sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes y se tienen las columnas de términos independientes al mismo tiempo, es posible ahorrar tiempo de cálculo, resolviendo dichos sistemas simultáneamente.

En la sección anterior, vimos que las operaciones elementales usadas, tanto en el escalonamiento de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales como en la sustitución hacia atrás, dependen exclusivamente de la matriz de coeficientes, a menos que el sistema no tenga solución. Con base en este hecho, al resolver los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices aumentadas son

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & c_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & c_m \end{array}\right),$$

$$\cdots, \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & r_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & r_m \end{array}\right),$$

podemos ahorrar tiempo de cálculo, aplicando el Algoritmo 4 (Método de Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás), a la *matriz aumentada conjunta* de todos los sistemas,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 & c_1 & \cdots & r_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 & c_2 & \cdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m & c_m & \cdots & r_m \end{array}\right)$$

en lugar de hacerlo a cada una de las matrices aumentadas correspondientes a cada sistema de ecuaciones lineales. Incluso, podemos ahorrar aún más tiempo de computo, si antes de iniciar la sustitución hacia atrás, excluimos, de la matriz aumentada conjunta, las columnas correspondientes a los sistemas de ecuaciones lineales que no tengan solución. Ilustremos esta idea con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19: Resolvamos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & z & + & 2w & = & -3 \\ 3x & - & 6y & - & 3z & & & = & 12 \\ -2x & + & 4y & + & & - & 4w & = & -2 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & -9 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & & - & 4x_4 & = & 4 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & z_3 & + & 2z_4 & = & -2 \\ 3z_1 & - & 6z_2 & - & 3z_3 & & & = & 3 \\ -2z_1 & + & 4z_2 & + & & - & 4z_4 & = & 2 \end{array}.$$

Como la matriz de coeficientes de los tres sistemas es la misma, entonces

1. Escribamos la matriz aumentada conjunta de estos tres sistemas de ecuaciones lineales

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 & 12 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

2. A esta matriz, apliquémosle operaciones elementales entre filas para encontrar una matriz escalonada equivalente a ella (Algoritmo 1 - Método de Eliminación de Gauss)

$$\begin{array}{rcl} F_1 & \longleftrightarrow & F_2 \\ F_3 + \frac{2}{3}F_1 & \longrightarrow & F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 12 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 6 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 12 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

3. Como, en la matriz de coeficientes, la tercera fila es de ceros, determinemos cuál(es) sistema(s) no tienen solución para excluirlos. Efectivamente, el segundo sistema no tiene solución, ya que en su correspondiente columna de términos independientes, su tercera componente es diferente de cero. Con esta misma matriz, también nos damos cuenta que la segunda y cuarta variables son variables

libres, por lo tanto, los otros dos sistemas tienen infinitas soluciones. Excluyendo la segunda columna de términos independientes y la fila de ceros, tenemos.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & -3 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

4. A esta matriz, apliquémosle operaciones elementales entre filas para hallar las soluciones del primer y tercer sistema (Algoritmo 3 - Sustitución hacia atrás).

$$F_1 + 3F_2 \longrightarrow F_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}F_1 \longrightarrow F_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

5. Finalmente, despejando las variables pivotales, obtenemos que el conjunto solución del primer sistema es

$$\{(1 + 2r - 2s,\ r,\ -3 - 2s,\ s) :\ r, s \in \mathbb{R}\}$$

y el del tercer sistema es

$$\{(-1 + 2r - 2s,\ r,\ -2 - 2s,\ s) :\ r, s \in \mathbb{R}\}.$$

□

Notemos que, aunque un conjunto de sistemas de ecuaciones lineales tengan las misma matriz de coeficientes, si los términos independientes de uno de ellos dependen de la solución de uno de los otros sistemas o si dichos términos no se tienen todos al mismo tiempo, los sistemas no se pueden resolver simultáneamente. Para estas dos situaciones que muy frecuentemente aparecen en aplicaciones de las ciencias y la ingeniería[12], en la Sección 3.8, presentaremos un esquema alternativo para ahorrar tiempo de computo.

[12] Algoritmo simplex revisado [3] y Refinamiento iterativo [8], por ejemplo.

1.6. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	**Página**	**Conceptos**	**Página**
Ecuación	2	Sistemas equivalentes	8
Solución de una ecuación	2	Sustitución hacia atrás	8, 22
Conjunto solución de una ecuación	2	Matriz del sistema	10
		Matriz de coeficientes	10
n-upla	2	Matriz aumentada del sistema	10
Ecuación lineal	3	Operaciones elementales entre ecuaciones	10
Pivote	4		
Variable pivotal de una ecuación	4	Operaciones elementales entre filas	11
Sistema de ecuaciones lineales	5	Matrices equivalentes	12
Sistema homogéneo	5	Eliminación de Gauss	13, 14
Sistema homogéneo asociado	5	Matriz escalonada	13
Solución de un sistema	6	Columna pivotal	13
Conjunto solución de un sistema	6	Variable pivotal de un sistema escalonado	16
Conjunto solución infinito	7	Variable libre	16
Conjunto solución vacío	7	Matriz escalonada reducida	25
Conjunto solución unitario	7	Matriz aumentada conjunta	29
Sistema consistente	8		

1. Dadas las siguientes ecuaciones:

   (i) $4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0$ (ii) $3x_1^2 - x_2 + 5x_3 = 2 - x_1$

   (iii) $4x_1 - 3x_2 - 1 = x_3 + 5x_5$ (iv) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = \dfrac{3x_2 + 5}{4 - 4x_3}$

   (v) $\sqrt{3}x + \pi y - 12z = 7^{2/3}w$ (vi) $x_1 sen\frac{\pi}{3} + \frac{x_2}{4} - 3 = 0$

   a) ¿Cuáles son *lineales*? ¿Por qué?

   b) ¿Cuáles son *homogéneas*? ¿Por qué?

   c) ¿Cuáles son los *coeficientes* y los *términos independientes* de las ecuaciones que usted identificó como lineales?

   d) Escriba las *ecuaciones homogéneas asociadas* a las ecuaciones que usted identificó como lineales.

   e) ¿Cuáles de las ternas $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 2, -1)$ son *solución de la ecuación* (i)? ¿Por qué?

   f) ¿Cuáles de las 4-uplas $(1, 1, 1, 1)$, $(\sqrt{3}, 0, \frac{1}{4}, 0)$, $(12, 0, \sqrt{3}, 0)$ son *solución de la ecuación* (v)? ¿Por qué?

   g) ¿Es posible encontrar otras soluciones de la ecuación (i)? De ser posible, halle al menos otra.

h) ¿Es posible encontrar otras soluciones de la ecuación (v)? De ser posible, halle al menos otra.

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine sus variables con los respectivos coeficientes, su término independiente y su ecuación homogénea asociada. Determine además, si es posible, dos soluciones y **el conjunto solución.**

$$(i)\ 4x + 2y - x - 3 = 0$$
$$(ii)\ 3x - 2y + z = 2 - x + 2z$$
$$(iii)\ 4x_1 - 3x_2 - 1 = x_3 + 5x_5$$

3. Sean a, b números reales y x *la variable* de la ecuación $ax = b$.

a) ¿Es ésta una *ecuación lineal*?

b) ¿Es siempre posible hallar el valor de x (despejar x) que satisface la ecuación?

4. Conteste SI o NO a las siguientes preguntas, dando una breve explicación de su respuesta.

a) ¿Es posible encontrar una ecuación lineal que no tenga solución?

b) ¿Es posible encontrar una ecuación lineal homogénea que no tenga solución?

5. Encuentre todos los valores de a para los cuales cada una de las siguientes ecuaciones

$$(i)\ (a-3)x = 5 \qquad (ii)\ 2x = a$$
$$(iii)\ (a^2-4)x = 0 \qquad (iv)\ (a^2-4)x = a + 2$$

a) tiene exactamente una solución.

b) tiene infinitas soluciones.

c) no tiene solución (es inconsistente).

6. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(i)\ \begin{array}{rcr} x - 2y &=& 2 \\ 2x + 3y &=& -3 \end{array} \qquad (ii)\ \begin{array}{rcr} x - 2y &=& -1 \\ -2x + 4y &=& 2 \end{array}$$

$$(iii)\ \begin{array}{rcr} x - 2y &=& -1 \\ -2x + 4y &=& 2 \end{array} \qquad (iv)\ \begin{array}{rcr} x - 2y &=& 0 \\ 3x - y &=& 0 \end{array}$$

a) ¿Cuáles son *homogéneos*? Por qué?

b) ¿Cuáles son los *coeficientes* y los *términos independientes* de los sistemas?

c) ¿Cuáles de las duplas $(4,1)$, $(0,-1)$, $(2,2)$ son *solución del sistema* (i)? ¿Por qué?

d) ¿Cuáles de las duplas $(1,1)$, $(-2,4)$, $(3,2)$ son *solución del sistema* (ii)? ¿Por qué?

e) ¿Cuáles de las duplas $(1,1)$, $(-2,4)$, $(3,2)$ son *solución del sistema* (iii)? ¿Por qué?

f) ¿Es posible encontrar otras soluciones del sistema (i)? De ser posible, halle al menos otra.

g) ¿Es posible encontrar otras soluciones del sistema (ii)? De ser posible, halle al menos otra.

h) Determine cuáles de estos sistemas son *consistentes*.

i) Escriba los *sistemas de ecuaciones homogéneos asociados* a los sistemas de ecuaciones lineales dados.

7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z - 3 &= t \\ x + 3w - 2t &= 1 \\ -3x - y + 2z - 3w - t &= -2 \\ x + y + z - w &= 3 + 2t - w \end{aligned}$$

a) Determine su matriz de coeficientes, sus términos independientes y su matriz aumentada. [AYUDA: Defina un orden para las variables y reescriba cada una de las ecuaciones según este orden]

b) Determine el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado.

c) Determine los pivotes (especifique el tipo de pivotes (del sistema o de cada ecuación) dados en su respuesta).

8. Determine, en cada caso, si los sistemas de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

$$(i)\quad \begin{array}{rcl} x-y &=& 0 \\ -x-y &=& 2 \end{array} \text{ y } \begin{array}{rcl} 2u+3v &=& -5 \\ u-2v &=& 1 \end{array}$$

$$(ii)\quad \begin{array}{rcl} x-y &=& 0 \\ -x-y &=& 2 \end{array} \text{ y } \begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0 \\ -x-y+z &=& 2 \end{array}$$

$$(iii)\quad \begin{array}{rcl} x_1-x_2 &=& 0 \\ -x_1-x_2 &=& 2 \\ 2x_1-4x_2 &=& 2 \end{array} \text{ y } \begin{array}{rcl} 2s+3t &=& -5 \\ s-2t &=& 1 \end{array}$$

$$(iv)\quad \begin{array}{rcl} u+v+w &=& 1 \\ 2v-w &=& 0 \end{array} \text{ y } \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ 2y-z &=& 0 \\ 2x+3z &=& 2 \end{array}$$

9. Dada la ecuación lineal (i) $4x+2y+3z=2$, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 3, obtenemos la ecuación (ii) $12x+6y+9z=6$.

   a) Pruebe que la terna $(1, \frac{1}{2}, -1)$ es una solución tanto de la ecuación (i), como de la ecuación (ii).

   b) Halle otra solución de la ecuación (ii) y muestre que también es solución de la ecuación (i).

   c) Demuestre que cualquier solución de la ecuación (i) es también solución de la ecuación (ii).

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$i)\quad \begin{array}{rcl} x-y-z &=& -1 \\ 3x-y+z &=& 1 \end{array} ,$$

si a la segunda ecuación del sistema le sumamos la primera multiplicada por -3, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$ii)\quad \begin{array}{rcl} x-y-z &=& -1 \\ 2y+4z &=& 4 \end{array} ,$$

   a) Verifique que la terna $(2, 4, -1)$ es una solución tanto del sistema de ecuaciones lineales (i), como del sistema de ecuaciones lineales (ii).

   b) Halle otra solución del sistema de ecuaciones lineales (i) y muestre que también es solución del sistema de ecuaciones lineales (ii).

c) Demuestre que cualquier solución del sistema de ecuaciones lineales (*ii*) es también solución del sistema de ecuaciones lineales (*i*).

d) ¿Cuál o cuáles de los tres resultados anteriores permiten concluir que los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes?

e) Encuentre las matrices aumentadas asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales (*i*) y (*ii*). Verifique que estas matrices son equivalentes.

f) Si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, ¿Son sus correspondientes matrices aumentadas también equivalentes? [AYUDA: Analice los sistemas *iii*) y *iv*) del Ejercicio 8.]

11. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 7/3 \\ 0 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada sea A.

b) Determine el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al sistema de ecuaciones lineales de la parte a).

12. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, dibuje la gráfica correspondiente a cada uno de ellos. Determine geométricamente si cada sistema tiene solución y, en caso afirmativo, si la solución es única. Resuelva algebraicamente cada sistema para confirmar su respuesta.

$$(i)\quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + y &= -4 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ -3x + 6y &= 3 \end{aligned} \qquad (iii)\quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -3x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

13. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 0 \\ -4x & + & 2y & + & 3z & - & 3w & = & -1 \\ & - & 2y & - & z & + & 2w & = & 1 \end{array}$$

a) Efectúe operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema hasta llevarlo a uno con *patrón escalonado*.

b) Escriba la matriz de coeficientes y la matriz aumentada asociadas al sistema de ecuaciones lineales.

c) Describa las operaciones elementales entre filas correspondientes a las operaciones elementales entre ecuaciones efectuadas en la parte *a*).

14. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

(*i*)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -5y + 2z &= 6 \\ 4z &= -8 \end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned} x &= -1 \\ -x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

15. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales encontrados en el Ejercicio 11.

16. Los siguientes sistemas de ecuaciones son no lineales. Encuentre sustituciones de las variables que conviertan cada uno de ellos en un sistema de ecuaciones lineales y utilice este último para resolver el sistema inicialmente dado.

(*i*)
$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} &= 0 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} &= 1 \end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned} -2^a + 2(3^b) &= 1 \\ 3(2^a) - 4(3^b) &= 1 \end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 3 \\ x^2 + 2y^2 &= 6 \end{aligned}$$

17. Demuestre que, para cada tipo de operación elemental entre filas, existe una operación elemental que **reversa** el procedimiento. En otras palabras, que si la matriz B resulta de aplicar una operación elemental entre filas a la matriz A, existe otra operación elemental entre filas que al aplicársela a la matriz B se obtiene la matriz A.

18. Determine, para cada uno de los siguientes casos, si las matrices dadas son equivalentes [AYUDA: Trate de encontrar una secuencia de operaciones elementales entre filas que al aplicárselas a una matriz se obtiene la otra.]

$$(i)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(ii)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

19. Determine cuál o cuáles de las siguientes matrices son escalonadas.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}\ (ii)\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\ (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

20. A cada una de las siguientes matrices, aplique el método de eliminación de Gauss para encontrar una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ 10 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & - & 2w & = & 0 \\ -4x & + & 2y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \end{array},$$

   a) Determine su matriz aumentada asociada.

   b) Aplique el Algoritmo de Gauss para llevar la matriz encontrada en *a*) a una matriz escalonada.

   c) Identifique los pivotes de la matriz escalonada.

   d) Identifique las columnas pivotales de la matriz escalonada.

   e) Identifique las variables pivotales del sistema.

f) Identifique las variables libres del sistema.

g) Determine el tipo (vacío, unitario o infinito) de conjunto solución del sistema.

22. Determine las variables pivotales y las variables libres del sistema de ecuaciones lineales dado en el Ejercicio 7.

23. Cada una de las siguientes matrices es una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada asociada a un sistema de ecuaciones lineales.

$$(i)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine el número de ecuaciones y el número de variables de cada uno de los sistemas.

b) Identifique las variables pivotales de cada uno de los sistemas.

c) Identifique las variables libres de cada uno de los sistemas.

d) Determine el tipo de conjunto solución de cada uno de los sistemas.

e) Para los sistemas consistentes, encuentre el conjunto solución.

24. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(i)\quad \begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 2y + z &= -2 \\ x - 2z &= 3 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= x_4 \\ x_3 + x_4 &= x_1 \\ x_3 - 2x_4 &= x_2 \\ 2x_2 + x_3 &= x_1 \end{aligned}$$

$$(iii)\quad \begin{aligned} 2u - v &= z + 2 \\ u + z &= v \\ v - 5z &= 4 - u \end{aligned}$$

a) Resuelva cada uno de ellos, aplicando el método de eliminación de Gauss y sustitución hacia atrás.

b) Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos asociados.

c) ¿Existe alguna relación entre los tipos de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y su sistema homogéneo asociado?

25. Encuentre otra forma de escribir los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales de los Ejemplos 13 y 14.

26. Para cada una de las siguientes situaciones, respecto del tamaño del sistema de ecuaciones lineales (número de ecuaciones × número de variables) y el número de variables pivotales, ¿Qué puede decirse sobre el tipo de conjunto solución del sistema? Justifique su respuesta.

Tamaño del sistema	Número de variables pivotales	Tamaño del sistema	Número de variables pivotales
3×4	3	5×5	3
3×4	4	5×5	4
3×4	2	5×5	5
4×3	3	8×5	5
4×3	4	8×5	4
4×3	2	5×8	6
5×5	2	5×8	4

Trate de generalizar sus respuestas para un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones, n variables ($m \times n$) y k variables pivotales.

27. Qué puede decirse del tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales donde una de sus ecuaciones es

a) $0 = 0$. b) $0 = 5$. c) $4 = 0$. d) $3 = 3$.

28. Si en el proceso de escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \sqrt{2} & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -\pi & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 - b & b \end{array}\right).$$

a) ¿Es el sistema consistente cuando $a = b = 0$? En caso de serlo, ¿Es la solución única?

b) ¿Es el sistema consistente cuando $a = 1$ y $b = 0$? En caso de serlo, ¿Es la solución única?

c) ¿Es el sistema consistente cuando $a = 0$ y $b = 1$? En caso de serlo, ¿Es la solución única?

d) Si $b = 2$ y $a \neq 0$, ¿Qué puede decirse del conjunto solución?

e) Si $b = 1$ y $a \neq 0$, ¿Qué puede decirse del conjunto solución?

f) Si $a \neq 0$, dé un valor de b (diferente de 0), en caso de que exista, para que el sistema sea consistente.

g) Si $a \neq 0$, ¿Para qué valores de b, el sistema tiene infinitas soluciones?

h) Si $a \neq 0$, ¿Para qué valores de b, el sistema tiene solución única?

i) Si $a \neq 0$, ¿Para qué valores de b, el sistema es inconsistente?

j) Si $a = 0$, ¿Para qué valores de b, el sistema es no tiene solución?

29. Conteste FALSO o VERDADERO y diga POR QUÉ, a cada una de las siguientes afirmaciones

a) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, entonces cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficiente también tiene solución.

b) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, entonces su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado también tiene solución única.

c) Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución siempre que su sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado tenga solución.

d) El tipo de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado siempre es el mismo

e) Todo sistema de ecuaciones lineales con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.

f) Todo sistema de ecuaciones lineales con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.

g) Ningún sistema de ecuaciones lineales con 14 variables y 10 ecuaciones tiene solución única.

h) Un sistema de ecuaciones lineales con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.

i) Un sistema de ecuaciones lineales con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

j) Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.

k) Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.

l) Ningún sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 14 variables y 10 ecuaciones tiene solución única.

m) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 27 variables y 13 ecuaciones puede no tener solución.

n) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

ñ) Todo sistema de ecuaciones lineales consistente con 10 variables y 7 ecuaciones tiene infinitas soluciones.

o) Todo sistema de ecuaciones lineales consistente con 20 variables y 20 ecuaciones tiene solución única.

p) Ningún sistema de ecuaciones lineales consistente con 14 variables y 10 ecuaciones tiene solución única.

q) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 27 variables y 13 ecuaciones puede tener solución única.

r) Un sistema de ecuaciones lineales consistente con 100 variables y 300 ecuaciones puede tener solución única.

30. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a)
$$\begin{array}{rcr} 2x - 4z & = & -1 \\ x + y - w & = & 1 \\ y + z - 2w & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 2x_1 - 4x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 & = & 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 2r - 4t & = & 6 \\ r + s - u & = & 0 \\ s + t - 2u & = & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 2z_1 - 4z_3 & = & 3 \\ z_1 + z_2 - z_4 & = & -1 \\ z_2 + z_3 - 2z_4 & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcr} x - 2y + z & = & 1 \\ 2x - y - z & = & 0 \\ -3x + 3z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 3 \\ -3x_1 + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} u - 2v + w &= x_o \\ 2u - v - w &= y_o \\ -3u + 3w &= 0 \end{aligned}$$

donde $(x_o, y_o, 0)$ es una solución del primer sistema.

[AYUDA: Observe que, en cada caso, los sistemas dados tienen la misma matriz de coeficientes.]

31. Utilice un paquete (MatLab, MuPad, Mathematica, etc.) o programa de computador para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

    a) Ejercicio 7

    b) Ejercicio 13

    c) Ejercicio 24

    d) Ejercicio 30

    e) $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathbf{b} = (b_i)$, $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ para $n = 3, 5, 10, 20$ [13]

[13] La matriz definida en este ejercicio se conoce con el nombre de *Matriz de Hilbert*

Capítulo 2

VECTORES DE $\mathbb{R}^N$

2.1. Introducción

Una vez tenemos claro lo que es un sistema de ecuaciones lineales y su representación matricial, el significado de su solución, el tipo de conjunto solución y un método para analizar y calcular dicho conjunto, queremos formalizar uno de los conceptos matemáticos que intuitivamente utilizamos en el capítulo anterior. En este capítulo, estudiaremos las n-uplas como vectores de $\mathbb{R}^n$, las principales operaciones entre ellos y sus aplicaciones e interpretaciones geométricas, bien sean relacionadas con un sistema de coordenadas o como vectores libres, particularizando a los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Dado que una ecuación lineal con n variables representa geométricamente un hiperplano en $\mathbb{R}^n$, siendo un punto, una recta y un plano casos particulares para n =1, 2 y 3, respectivamente, aprovecharemos estas operaciones y sus propiedades algebraicas para hacer una introducción a la geometría analítica. También introducimos conceptos básicos del álgebra lineal tales como combinación lineal, independencia lineal, espacio generado y conjunto generador, lo cual esperamos sirva de base para su generalización en el capítulo de Espacios Vectoriales.

2.2. Conceptos básicos

En problemas prácticos de Física, Ingeniería, Economía y Salud, entre otros, existen cantidades como longitud, volumen, masa y tempe-

ratura que pueden determinarse sólo con su magnitud. Pero, también existen otras como la posición, la aceleración, la presión y la fuerza que además de la magnitud, requieren de una dirección y un sentido para determinarse; u otras como las notas de un estudiante que cursa 6 materias durante un semestre y la producción de una empresa que tiene 10 líneas de productos, las cuales requieren de una lista ordenada de números. Estos últimos casos los conocemos como cantidades *vectoriales* a diferencia del primero que son cantidades *escalares*. Con base en esta diferencia intuitiva, veamos la definición de vector y sus operaciones básicas.

Definición 1 [*Vector de* $\mathbb{R}^n$]. Llamamos *vector de* $\mathbb{R}^n$ a una lista ordenada de n números reales, la cual denotamos como $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. A x_1 lo llamamos *primera componente*, a x_2 *segunda componente* y en general, a x_k lo llamamos *k-ésima componente* del vector $\mathbf{x}$.[1]

Cualquier vector cuyas componentes sean cero lo llamamos *vector nulo* o vector cero y lo denotamos $\mathbf{0}$.

Ejemplo 1. El vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^4$ y su primera, segunda, tercera y cuarta componentes son 5, 0, -3 y 5, en ese orden. El vector $\begin{pmatrix} 13 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ y su primera y segunda componentes son 13 y $1/5$, respectivamente. □

[1] En la práctica, cada una de las componentes del vector tienen un significado concreto. Por ejemplo, para $n = 2$, la primera componente podría significar el número de niños en una reunión y la segunda, el número de adultos en la misma reunión; o el tiempo del primero y el segundo competidor en una carrera, podría ser el significado de la primera y segunda componente, respectivamente, etc.

Ejemplo 2. Los vectores $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$. A estos vectores los llamamos *vectores canónicos* de $\mathbb{R}^n$.[2] □

Diremos que dos vectores son *iguales* si todas sus componentes correspondientes son iguales. Así, para que el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sea igual al vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, a debe ser -2, b debe ser 1 y c debe ser 3 y, por razones similares, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es diferente del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ya que $1 \neq 3$.

Geométricamente, a los vectores de $\mathbb{R}^n$ los podemos interpretar como puntos; en particular, cuando $n = 2$ ó $n = 3$, son puntos del *plano* o del *espacio*, respectivamente.

Ejemplo 3. Representemos los vectores $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en el *plano* y los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ en el *espacio*.

En áreas como la física [19] y la geometría [20], [17] es importante que pensemos en un vector, no como un punto, sino como **algo** que tiene magnitud, dirección y sentido. Por esta razón, introduzcamos la noción de vector libre.

[2] Algunos autores [7] [16] denotan los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente; es decir,

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

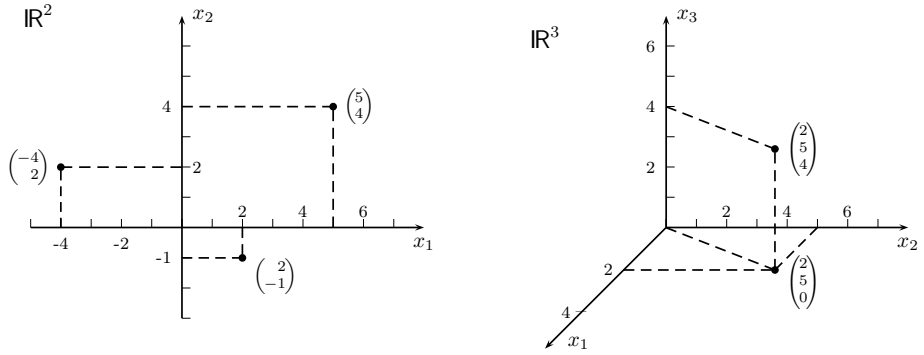


Figura 2.1: Representación de vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$

□

Definición 2 [*Vector libre*]. Un vector libre es un objeto matemático que podemos determinar por su dirección, sentido y magnitud.

Geométricamente, podemos representar los vectores libres como *segmentos dirigidos*[3], los que denotamos con letras en negrilla, tales como **u**, **v**, etc., o bien como $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, donde las primeras letras corresponden a los puntos iniciales y las otras a los puntos finales de estos segmentos. Si dos segmentos dirigidos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ tienen igual magnitud, dirección y sentido, decimos que son *iguales*. De esta forma, dado un vector libre, hay infinitos vectores libres iguales a él, como lo mostramos en la Fig.2.2.

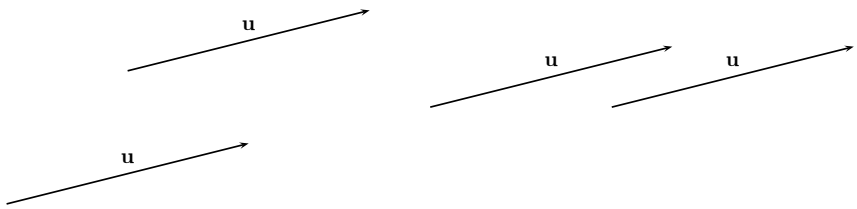


Figura 2.2: Representación de vectores libres iguales

Al vector cuyo punto inicial coincide con su punto final lo llamamos *vector nulo o vector* **0**. Este vector no tiene dirección, ni sentido y su magnitud es 0.

[3] **Definición** [*Segmento dirigido*]. Llamamos segmento dirigido $\overline{PQ}$ a la parte de una recta comprendida entre dos puntos: uno inicial (P) y uno final (Q), su longitud representa la magnitud del vector, la recta que lo contiene define la dirección del vector y la orientación de P hacia Q representa el sentido.

En áreas como geometría, los vectores se pueden representar como puntos y como segmentos dirigidos, y en muchas ocasiones, el tener simultáneamente las dos representaciones es de mucha utilidad. Por esta razón, queremos resaltar la relación entre estas dos representaciones cuando tenemos un sistema de coordenadas (o sistema de referencia). Primero, observemos que si el vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ está representado por el punto P, el mismo vector $\mathbf{p}$ está representado por el vector libre $\overline{OP}$, donde el punto O es el origen del sistema de coordenadas.

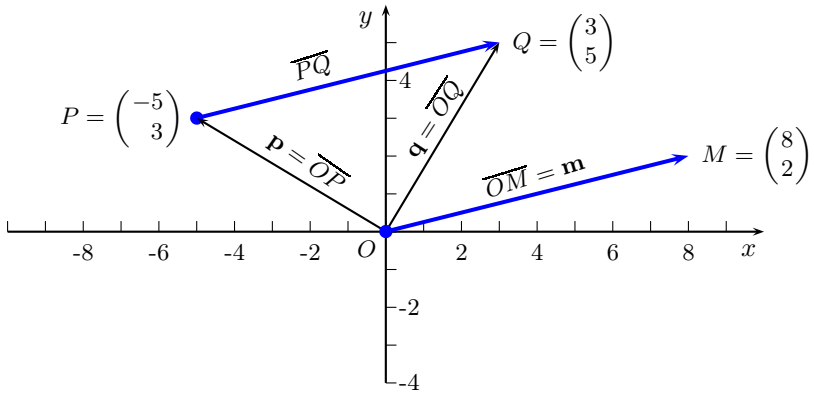


Figura 2.3: Representación de vectores y vectores libres de $\mathbb{R}^2$ en un sistema de coordenadas

Segundo, observemos que si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ representados por los puntos P y Q, respectivamente, y $\overline{PQ}$ es el vector libre definido por estos dos puntos, por la propiedad geométrica de los vectores libres mencionada anteriormente, existe un vector libre que parte del origen del sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y que es igual a $\overline{PQ}$. Sea $\overline{OM}$ dicho vector libre. El vector $\mathbf{m}$ que está representado por el punto M también está representado por el vector libre $\overline{PQ}$. En la siguiente sección, veremos cómo calcular las componentes del vector $\mathbf{m}$ a partir de las componentes de los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$; por lo pronto, ilustramos esta observación con un gráfico en $\mathbb{R}^2$ (Fig.2.3).

2.3. Operaciones con vectores

Al igual que con las cantidades escalares, dadas unas cantidades vectoriales, es deseable obtener otras a partir de ellas. Para empezar, esto es posible usando las operaciones básicas entre vectores: la suma

y el producto por escalar que definimos a continuación.

Definición 3 [*Suma de vectores de* R^n]. Definimos la *suma entre dos vectores* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ como el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; es decir,

$$\text{dados } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ definimos } \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

En término de vectores libres, el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que va desde el punto inicial del vector $\mathbf{u}$ hasta el punto final del vector $\mathbf{v}$, después de *mover paralelamente* el vector $\mathbf{v}$ de tal manera que su punto inicial coincida con el punto final de $\mathbf{u}$. En otras palabras, el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que va desde el punto inicial de $\mathbf{u}$ hasta el punto final de $\mathbf{v}$, como lo ilustramos en la Fig.2.4

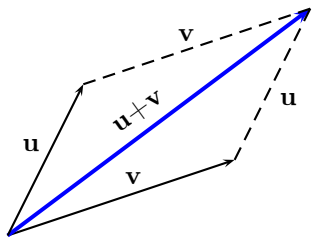


Figura 2.4: Suma de vectores libres

Definición 4 [*Producto por escalar en* R^n]. Definimos el *producto por escalar* de un vector $\mathbf{u}$ por un número real o escalar λ como el vector $\lambda\mathbf{u}$, cuyas componentes son el producto de λ por las componentes respectivas del vector $\mathbf{u}$; es decir, dados

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ definimos } \lambda\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

En término de vectores libres, el vector $\lambda\mathbf{u}$ es el vector que tiene igual dirección que el vector $\mathbf{u}$ y que, dependiendo del signo de λ, tiene

igual sentido ($\lambda>0$) o sentido opuesto ($\lambda<0$) al del vector $\mathbf{u}$, y cuya magnitud es $|\lambda|$ por la magnitud del vector $\mathbf{u}$, como lo ilustramos en la Fig.2.5

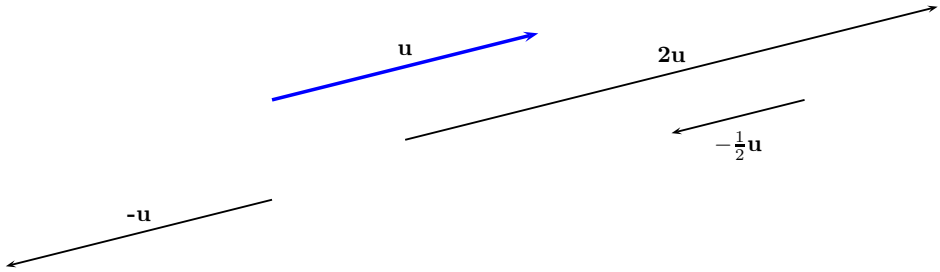


Figura 2.5: Producto por escalar de vectores libres

Un caso especial de esta operación es $(-1)\mathbf{u}$, lo cual denotamos como $-\mathbf{u}$ y lo denominamos *vector opuesto* a $\mathbf{u}$, ya que tiene la misma dirección y magnitud que $\mathbf{u}$ pero sentido opuesto (Fig.2.5).

De la interpretación geométrica del producto por escalar, deducimos que dos vectores distintos de cero *tienen igual dirección (o son paralelos)*, si y sólo si, el uno es un escalar por el otro. Así, todos los vectores de la Fig.2.5 son paralelos entre si, ya que son múltiplos por escalar unos de otros.

Definida la suma y el producto por escalar, podemos definir la *resta* $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ como la suma de $\mathbf{u}$ con el opuesto de $\mathbf{v}$; es decir, $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. En término de vectores libres, la resta $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es la diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que va desde el punto final de $\mathbf{v}$ hasta el punto final de $\mathbf{u}$, cuando ellos tienen el mismo punto inicial. Así, al vector $\overline{PR}$ lo podemos ver como la resta $\overline{OR}-\overline{OP}$, tal como lo ilustramos en la Fig. 2.6 y lo habíamos prometido al final de la sección anterior.

Muchos de los cálculos que hacemos con vectores son similares a los que efectuamos con escalares ó números reales, pero ojo! No siempre es así, como veremos más adelante. Para llamar la atención sobre este punto, veamos cuáles son las propiedades algebraicas que poseen las dos operaciones básicas antes definidas, las cuales son muy parecidas a las que poseen los números reales.

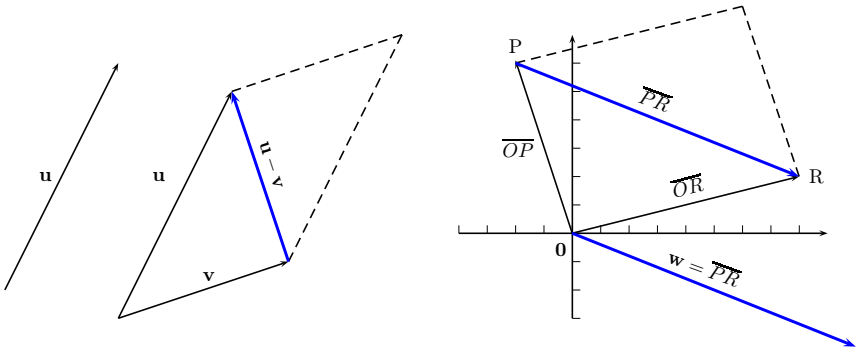


Figura 2.6: Resta de vectores libres

Teorema 1 [*Propiedades de la suma y el producto por escalar de vectores de* $\mathbb{R}^n$].
Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y sean α y β dos números reales. Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n$. *Ley clausurativa para la suma*
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. *Ley asociativa para la suma*
3. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$. *Ley conmutativa para la suma*
4. Existe un único vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{z} = \mathbf{z}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$ $(\mathbf{z} = \mathbf{0})$. *Ley modulativa para la suma*
5. Para cada $\mathbf{u}$, existe un único vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{p} = \mathbf{p}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$ $(\mathbf{p} = -\mathbf{u})$. *Existencia del opuesto para la suma*
6. $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. *Ley clausurativa para el producto por escalar*
7. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$. *Ley distributiva del producto por escalar respecto a la suma de vectores*
8. $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$. *Ley distributiva del producto por escalar respecto a la suma de escalares*
9. $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) = \beta(\alpha\mathbf{u})$. *Ley asociativa respecto al producto por escalares*
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. *Ley modulativa para el producto por escalar*
11. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

12. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

13. $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$, si y sólo si, $\alpha = 0$ ó $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Demostración: La Propiedad 1 es inmediata de la definición de la suma de vectores. Demostremos la Propiedad 2 y las demás las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 9). Sean u_i, v_i y w_i las i-ésimas componentes de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, respectivamente. Entonces, $u_i + v_i$ es la i-ésima componente de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, así que $(u_i + v_i) + w_i$ es la i-ésima componente de $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. Del mismo modo, tenemos que $u_i + (v_i + w_i)$ es la i-ésima componente de $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Como $(u_i+v_i)+w_i = u_i+(v_i+w_i)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, por la propiedad asociativa de la suma de números reales, las componentes respectivas de $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ y de $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ son iguales. Concluimos entonces que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ son iguales. □

El siguiente ejemplo ilustra la utilidad del teorema anterior.

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}(2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (5\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) + 7\mathbf{u} &= 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w} - 5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 7\mathbf{u} \\ &= (2\mathbf{u} - 5\mathbf{u} + 7\mathbf{u}) + (2\mathbf{v} - 3\mathbf{v}) + \mathbf{w} \\ &= (2 - 5 + 7)\mathbf{u} + (2 - 3)\mathbf{v} + \mathbf{w} \\ &= 4\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}\ .\end{aligned}$$

□

2.4. Combinación lineal y conjuntos generado y generador

Con las operaciones básicas, a partir de un conjunto de vectores, podemos obtener muchos vectores más: todos los múltiplos por escalar de los vectores iniciales y todas las sumas de estos. A continuación, presentamos la definición formal de estos elementos.

Definición 5 [*Combinación lineal en R^n*]. Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, decimos que el vector

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$$

es una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los llamamos *coeficientes* de la combinación lineal. Si todos los escalares son iguales a cero, tenemos la *combinación lineal trivial* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Ejemplo 5. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculemos la combinación lineal de ellos dada por $3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$. (los coeficientes de esta combinación lineal son 3, -1 y 2, respectivamente)

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6. Determinemos si los vectores $\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son combinaciones lineales de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; es decir, veamos si existen escalares α, β, λ y μ, tales que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Equivalentemente, veamos si los sistemas

$$\begin{array}{rcr} \alpha - 5\beta &=& -13 \\ 2\beta &=& 4 \\ -2\alpha - 3\beta &=& 0 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcr} \lambda - 5\mu &=& 2 \\ 2\mu &=& 0 \\ -2\lambda - 3\mu &=& -1 \end{array}$$

son consistentes. Aplicando las operaciones elementales $F_3 + 2F_1 \to F_3$ y $F_3 + \frac{13}{2}F_2 \to F_3$ a la matriz aumentada conjunta de los sistemas anteriores,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & -13 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) ,$$

obtenemos la matriz escalonada conjunta

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & -13 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

lo que indica que el primer sistema es consistente (¿Por qué?), mientras que el segundo no lo es (¿Por qué?). Así que $\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, mientras que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ no lo es.

□

Del ejemplo anterior, observemos que para determinar si un vector es combinación lineal de otros vectores no es necesario calcular los escalares o coeficientes de la combinación lineal; basta con verificar que dichos escalares existen.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores dado, por su importancia práctica y teórica, recibe un nombre especial.

Definición 6 [*Conjunto generado y Conjunto generador en* $\mathbb{R}^n$]. Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ de $\mathbb{R}^n$ lo llamamos *conjunto generado* por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ y lo representamos por

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

En otras palabras, si $V = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, decimos que V es generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$; además, a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lo llamamos *conjunto generador* de V.

Antes de analizar algunos ejemplos, notemos que, aunque el conjunto generado por un conjunto de vectores dado es único, el conjunto generador de un conjunto generado no es único (Ver Ejercicio 20).

Ejemplo 7. Si $V = Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, entonces $2\mathbf{u} + \sqrt{5}\mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{u}, 3\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}$ son vectores de V.

Es claro que $2\mathbf{u} + \sqrt{5}\mathbf{v}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, lo que implica que $2\mathbf{u} + \sqrt{5}\mathbf{v} \in V$. Veamos que cada uno de los otros vectores también es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbf{0} & = & 0\mathbf{u}+0\mathbf{v} & & 3\mathbf{v} & = & 0\mathbf{u}+3\mathbf{v} \\ \mathbf{u} & = & 1\mathbf{u}+0\mathbf{v} & & \mathbf{u}-\mathbf{v} & = & 1\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}. \end{array}$$

Por lo tanto pertenecen a V. Observemos que $\{2\mathbf{u}, 5\mathbf{v}\}$ también es un conjunto generador de V (Ver Ejercicio 20). □

Ejemplo 8. El conjunto generado por un sólo vector **no nulo** es el conjunto de todos los múltiplos por escalar de él; es decir, es el conjunto de todos los vectores paralelos al vector dado, además del vector $\mathbf{0}$.[4]

En efecto, si $V = Gen\{\mathbf{v}\}$ y $\mathbf{u} \in V$, entonces $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y si $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{v}$), entonces $\mathbf{w} \in V$.[5] Observemos que otro conjunto generador de V es $\{\alpha\mathbf{v}\}$, para cualquier número real $\alpha \neq 0$. □

Ejemplo 9. Demostremos que $Gen\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$.

Por las Propiedades 1 y 6 del Teorema 1, cualquier combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Veamos ahora que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ lo podemos escribir como combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.[6]

En efecto, sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{u} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Ejemplo 10. Verifiquemos que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertenece a $W = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

[4] Notemos que el conjunto generado por el vector $\mathbf{0}$ es $\{\mathbf{0}\}$; es decir, $Gen\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$.

[5] Observemos también que, geométricamente, $Gen\{\mathbf{v}\}$, con $\mathbf{v} \neq 0$, es una *linea recta* que pasa por el origen. En la Sección 2.8, ampliaremos esta observación.

[6] En particular, para $n = 3$, si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

Veamos que efectivamente existen escalares α y β tales que $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. O lo que es equivalente, que existen escalares α y β tales que

$$\begin{aligned} 3 &= 1\alpha + 0\beta \\ 0 &= 0\alpha + 0\beta \\ 2 &= 1\alpha - 1\beta, \end{aligned}$$

para lo cual basta escalonar la matriz $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

Así, realizando las operaciones elementales $F_3 - F_1 \to F_3$ y $F_2 \leftrightarrow F_3$, obtenemos $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; de donde, podemos concluir que el sistema tiene solución y por tanto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$

Adicionalmente, si queremos encontrar la combinación lineal explícita, tenemos que resolver el sistema asociado a la matriz escalonada,

$$\begin{aligned} 1\alpha + 0\beta &= 3 \\ 0\alpha - 1\beta &= -1, \end{aligned}$$

obteniendo $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. Así que $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Observemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ también es un conjunto generador de W, pero $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ no lo es y $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ tampoco. (Ver Ejercicios 19 y 20). □

2.5. Producto $A\mathbf{x}$

Observemos que las columnas de las matrices introducidas en el primer capítulo son vectores de $\mathbb{R}^m$, siendo m el número de filas de la matriz; es decir, que las matrices las podemos ver como una sucesión (finita y ordenada) de vectores, lo cual denotamos como

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_n]$$

para indicar que los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$, en su orden, son las columnas de la matriz A. Esta notación nos permite simplificar la escritura de las combinaciones lineales estudiadas en la sección anterior, como lo planteamos en la siguiente definición.

Definición 7 [*Producto* $A\mathbf{x}$]. Sea A una matriz, cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^m$, y sea $\mathbf{x}$ un vector de $\mathbb{R}^n$, cuyas componentes son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Definimos $A\mathbf{x}$, el producto de la matriz A por el vector $\mathbf{x}$, como la combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, con coeficientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente; es decir,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Observemos que si multiplicamos la matriz A por el vector canónico $\mathbf{e}_j$, el resultado es la j-ésima columna de A; en otras palabras,

$$A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j \ .$$

Ejemplo 11. Dados $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, encontremos $A\mathbf{x}$.

$$A\mathbf{x} = 0\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

El siguiente teorema describe las propiedades fundamentales de esta operación.

Teorema 2 [*Propiedades del producto* $A\mathbf{x}$].
Dados A, una matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbb{R}^m$, λ un escalar y $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

1. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$
2. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$

Demostración: Demostremos la primera propiedad, dejando la segunda como ejercicio para el lector (Ejercicio 22). Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las componentes de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, respectivamente. Entonces, dado que las componentes del vector $(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ son $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n$, y aplicando las propiedades algebraicas de la suma de vectores y del producto por escalar (Teorema 1), tenemos

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (x_1+y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2+y_2)\mathbf{a}_2 + \ldots + (x_n+y_n)\mathbf{a}_n \\ &= x_1\mathbf{a}_1 + y_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + y_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n + y_n\mathbf{a}_n \\ &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n) + (y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \ldots + y_n\mathbf{a}_n) \\ &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Notemos que el producto $A\mathbf{x}$ nos ofrece una forma elegante y simple de representar un sistema de ecuaciones lineales.
Ejemplo 12. El sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -2 \\ x - 3z &= 1 \end{aligned}$$

lo podemos expresar en forma vectorial como

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y esta ecuación vectorial, teniendo en cuenta la definición del producto de una matriz por un vector, lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dicho de otro modo, un sistema de ecuaciones lineales lo podemos expresar en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A representa la matriz de

coeficientes, $\mathbf{x}$ el vector de las incógnitas y $\mathbf{b}$ el vector de los términos independientes. De esta manera, tenemos que $[A|\mathbf{b}]$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ son distintas formas de representar un sistema de ecuaciones lineales.

Así, afirmar que, por ejemplo, un sistema $[A|\mathbf{b}]$ es consistente, es equivalente a decir que existe un vector $\mathbf{x}$, tal que $\mathbf{b}$ lo podemos expresar como el producto $A\mathbf{x}$. De aquí que las siguientes afirmaciones son equivalentes, cuyas demostraciones dejamos para el lector (Ejercicio 34).

Teorema 3 [*Equivalencia de conceptos*].
Dados A una matriz, cuyas n columnas son vectores de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{b}$ un vector de $\mathbb{R}^m$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Existe al menos un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. El sistema cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$ es consistente.
3. El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
4. El vector $\mathbf{b}$ pertenece al conjunto generado por las columnas de A.

Al conjunto de vectores $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y al conjunto de vectores $\mathbf{b}$, tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para algún vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, los llamamos de manera especial, por las propiedades que tienen.

Definición 8 [*Espacio nulo de una matriz*]. Dada A, una matriz con n columnas, definimos *el espacio nulo* de A como el conjunto N_A de todos los vectores $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto es

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Ejemplo 13. Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinemos si los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ se encuentran en N_A. Luego, encontremos un conjunto generador de N_A.

Rápidamente nos damos cuenta que $\mathbf{u}$ no está en N_A, ya que $A\mathbf{u}$ no está definido, y que $\mathbf{v}$ tampoco está en N_A, porque

$$A\mathbf{v} = 1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mientras que $\mathbf{w}$ si se encuentra en N_A, ya que

$$A\mathbf{w} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar un conjunto generador de N_A, tratemos de calcular todos los elementos de N_A; es decir, calculemos todas las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Aplicando eliminación de Gauss a la matriz A y luego, sustitución hacia atrás, tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 + 2F_1 \to F_2 \\ \\ \frac{1}{5}F_2 \to F_2 \\ F_1 - 2F_2 \to F_1 \\ -F_1 \to F_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, el conjunto solución del sistema (N_A) es $\left\{ t\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

es decir, que un conjunto generador de N_A es $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. □

Observemos que $\mathbf{0}$ siempre está en N_A (el vector $\mathbf{0}$ siempre es solución de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos) y aunque, en general, N_A puede tener vectores no nulos, $N_A = \{\mathbf{0}\}$, si y sólo si, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única.

Las propiedades más importantes del espacio nulo están contenidas en el siguiente teorema.

Teorema 4 [*Propiedades del espacio nulo*].
Dada una matriz A, si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ son vectores de N_A y λ es un escalar, tenemos que:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N_A$
2. $\lambda\mathbf{x} \in N_A$

Demostración: Puesto que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_A$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$; entonces, por el Teorema 2

1. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, por tanto, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N_A$.
2. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de donde, concluimos que $\lambda\mathbf{x} \in N_A$.

□

Definición 9 [*Espacio columna de una matriz*]. Dada A, una matriz con n vectores columna de $\mathbb{R}^m$, definimos *el espacio columna* de A como el conjunto C_A de todos los vectores $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$ para los que existe un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Esto es

$$C_A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Observemos que C_A está formado por todas las combinaciones lineales de las columnas de A; es decir,

$$C_A = Gen\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\},$$

donde $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ son las columnas de A.

Ejemplo 14. Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinemos si $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ se encuentran en C_A. Luego encontremos un conjunto generador de C_A.

Por el Teorema 3, este problema es equivalente a determinar si los sistemas cuya matriz aumentada conjunta es

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

son consistentes. Al escalonar esta matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

lo que nos indica que el primer sistema es consistente, mientras que el segundo no lo es. Así que $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ se encuentra en C_A, mientras que $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ no.

Por la definición de espacio columna, un conjunto generador de C_A es el conjunto de columnas de A; es decir,

$$C_A = Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

□

Las dos propiedades fundamentales del espacio columna están contenidas en el siguiente teorema.

Teorema 5 [*Propiedades del espacio columna*].
Dada una matriz A, los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ de C_A y λ un escalar, entonces:

1. $\mathbf{b} + \mathbf{c} \in C_A$
2. $\lambda\mathbf{b} \in C_A$

Demostración: Puesto que $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in C_A$, existen vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$. Entonces,

1. $\mathbf{b} + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, por tanto, $\mathbf{b} + \mathbf{c} \in C_A$.
2. $\lambda\mathbf{b} = \lambda(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x})$, de donde concluimos que $\lambda\mathbf{b} \in C_A$. □

Con base en las propiedades del producto $A\mathbf{x}$, observemos las relaciones que existen entre las soluciones de un sistema y las de su sistema homogéneo asociado.

Corolario 5.1.
Dada una matriz A, si el vector $\mathbf{u}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y el vector $\mathbf{v}$ es solución del sistema homogéneo asociado ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$), entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Demostración:

$$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

□

Corolario 5.2.
Dada una matriz A, si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración: Si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Restando estas dos últimas igualdades, tenemos que $A(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{b}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Así que $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Estos dos últimos resultados nos permiten caracterizar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, conociendo una solución de él y el conjunto solución del sistema homogéneo asociado.

Corolario 5.3.
Dada una matriz A y una solución $\mathbf{u}$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si y sólo si, $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{h}$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = 0$.

Demostración: Sea $\mathbf{v}$ una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ es solución del sistema homogéneo asociado (Corolario 5.2) y por tanto $\mathbf{v} = \mathbf{h}+\mathbf{u}$. La otra implicación es el resultado del Corolario 5.1. □

Con base en los tres últimos corolarios, podemos demostrar que el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es *cero, uno o infinito*, lo cual ya habíamos anunciado en el Capítulo 1 y resumimos en el siguiente corolario.

Corolario 5.4.
Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que tiene más de una solución, tiene infinitas soluciones.

Demostración: Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos soluciones diferentes del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Por el Corolario 5.2, $\mathbf{h} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = 0$. Por el Teorema 4, $\alpha\mathbf{h}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, también es solución del sistema homogéneo, lo que nos indica

que el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones. Por el Corolario 5.3, $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{h} + \mathbf{u}$ es también solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Así que, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones. □

2.6. Independencia lineal

El hecho que $\mathbf{w}$ pueda escribirse como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$, podríamos interpretarlo como que $\mathbf{w}$ "depende" de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ y, en este contexto, podemos decir que si un vector se puede expresar como combinación lineal de otros, éste depende de ellos. Pero, por ejemplo, si

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{u} - 3\mathbf{v},$$

también tenemos que

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{w} + 6\mathbf{v},$$

lo que da origen a la pregunta de si es $\mathbf{w}$ el que depende de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ o es $\mathbf{u}$ el que depende de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$. Para evitar este aparente inconveniente, establecemos la siguiente definición.

Definición 10 [*Conjunto de vectores linealmente dependientes*]. Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es *linealmente dependiente (l.d.)* si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, al menos uno de ellos diferente de cero, tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que no es linealmente dependiente lo llamamos *linealmente independiente (l.i.)*. Es decir, un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es *linealmente independiente* si los únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

son todos cero.

Ejemplo 15. Demostremos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*

Si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que el sistema correspondiente, además de ser homogéneo, tiene como matriz de coeficientes a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, y que, al escalonar esta matriz, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. De esta última matriz, podemos concluir que el sistema de ecuaciones tiene como solución única el vector cero y por tanto, el conjunto de vectores es *l.i.* □

Ejemplo 16. Demostremos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto de vectores *l.d.*

Si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que el sistema correspondiente, además de ser homogéneo, tiene como matriz de coeficientes a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, y que, al escalonar esta matriz, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de donde podemos concluir que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y por tanto, el conjunto de vectores es *l.d.* □

Ejemplo 17. Demostremos que todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ que contenga el vector nulo es un conjunto de vectores *l.d.*

Es claro que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k + \lambda_{k+1} \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ y λ_{k+1} toma cualquier valor; por tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{0}\}$ es *l.d.* □

Aunque en el Capítulo 4 estudiaremos más en detalle las propiedades de los conjuntos *l.d* y de los conjuntos *l.i.*, es importante que

notemos que, en un conjunto de vectores *l.d.*, uno de ellos es combinación lineal de los otros y que, cuando esto pasa, el conjunto de vectores es *l.d.* (Ejercicio 42).

Además, como lo indicaron los ejemplos anteriores, notemos que la independencia lineal de vectores la podemos determinar analizando una forma escalonada de la matriz cuyas columnas son los vectores en cuestión, lo cual resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 6 [*Equivalencia de conceptos*].
Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $\mathbb{R}^m$, sea A la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots,\ \mathbf{v}_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es *l.i.*
2. El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única (la solución trivial o vector cero).
3. Toda matriz escalonada equivalente a la matriz A tiene n pivotes.

Demostración: Para demostrar la equivalencia de estas tres afirmaciones, es suficiente demostrar que cada una de ellas implica la siguiente y que la última implica la primera. A continuación, demostramos que la primera afirmación implica la segunda y dejamos la demostración de las otras implicaciones como ejercicio para el lector (Ejercicio 46).

Supongamos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es *l.i.*, entonces la única combinación lineal de ellos igual a cero es la trivial. Usando la definición del producto $A\mathbf{x}$, lo anterior significa que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única: el vector cero. □

Para terminar esta sección, veamos que la forma escalonada equivalente a una matriz no sólo nos informa si sus columnas forman o no un conjunto de vectores *l.i.*, sino que también nos indica cuántas y cuáles columnas forman un conjunto de vectores *l.i.* El siguiente teorema nos dice que las columnas correspondientes de dos matrices equivalentes[7] forman conjuntos de vectores que son ambos *l.i.* o ambos *l.d.*

[7]Recordemos del Capítulo 1 que dos matrices son equivalentes, si y sólo si, una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales entre filas.

Teorema 7 [*Matrices equivalentes e independencia lineal*].
Si $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots \mathbf{a}_n]$ y $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots \mathbf{b}_n]$ son matrices equivalentes, entonces $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ es *l.i.*, si y sólo si, $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}\}$ es *l.i.*, para todo $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración: Como A y B son equivalentes, de la teoría del Capítulo 1, sabemos que las soluciones de los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son las mismas. De otro lado, por definición, $A\mathbf{x}$ es una combinación lineal de los vectores columna de A. Por consiguiente, $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, si y sólo si, $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. En particular, para cualquier subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k}\mathbf{a}_{i_k} = \mathbf{0}$, si y sólo si, $\lambda_{i_1}\mathbf{b}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{b}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k}\mathbf{b}_{i_k} = \mathbf{0}$. Así, que si $\lambda_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k}\mathbf{a}_{i_k} = \mathbf{0}$ implica que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_k} = 0$, entonces $\lambda_{i_1}\mathbf{b}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{b}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k}\mathbf{b}_{i_k} = \mathbf{0}$ implica que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_k} = 0$. Por tanto, $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ es *l.i.*, si y sólo si, $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}\}$ es *l.i.* □

Usando este resultado y el hecho que las columnas pivotales de una matiz escalonada forman un conjunto de vectores *l.i* (Ejercicio 44), podemos concluir que las columnas de una matriz correspondientes a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente a ella forman una conjunto de vectores *l.i*. Así, por ejemplo, podemos concluir que los dos primeros vectores del conjunto dado en el Ejemplo 16 forman un conjunto de vectores *l.i.*, ya que, en la matriz escalonada equivalente a la matriz formada por los tres vectores del conjunto, sus dos primeras columnas son pivotales.

2.7. Producto escalar

Volviendo atrás, decíamos que un vector, visto como vector libre, es un objeto matemático con magnitud, dirección y sentido; aspectos que intuitivamente entendemos, pero que deberíamos formalizar más. Para este efecto, introduciremos otra operación básica, el producto escalar entre dos vectores, la cual está relacionada con los conceptos de magnitud de un vector y de ángulo entre vectores.

Definición 11[*Producto escalar*].[8] Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, el *producto escalar* entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como el escalar que

[8] En la literatura, otros nombres usados para esta operación son *producto punto*[16] [7] y *producto interno [7].*

obtenemos al sumar los productos de las componentes de $\mathbf{u}$ con las respectivas componentes de $\mathbf{v}$. En otras palabras, dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, definimos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Ejemplo 18. Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 21 \end{pmatrix}$, calculemos los productos escalares entre ellos.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 12 + 0 \cdot (-3) + (-5) \cdot 0 = -2 + 24 + 0 + 0 = 22$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 = -6 + 2 + 0 - 20 = -24$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot (-2) + 12 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -2 + 24 + 0 + 0 = 22$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 3 + 12 - 15 + 0 = 0$$
$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) = -6 + 2 + 0 - 20 = -24$$
$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 12 + 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 = 3 + 12 - 15 + 0 = 0$$

Observemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ y que los productos escalares $\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$ y $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$ no están definidos. ¿Por qué?

□

La pregunta que inmediatamente surge es ¿Cuáles de las propiedades del producto entre números reales se satisfacen para el producto escalar entre vectores? y su respuesta nos la da el siguiente teorema, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 50).

Teorema 8 [*Propiedades básicas del producto escalar*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^n$ y el escalar α, tenemos que

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. *Ley conmutativa*
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. *Ley distributiva para la suma de vectores*
3. $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$.

Ejemplo 19. Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calculemos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, $(3\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$, $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

Usando la Definición 11 y aplicando las propiedades del producto escalar (Teorema 8), tenemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 0 = 5$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-1) = 0$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = -5$$
$$(3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 3 \cdot 5 = 15$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 + (-5) = -5$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$$

□

Observemos que, a diferencia de lo que ocurre con el producto entre números reales, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ **no** implica que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, como lo muestra el segundo producto del ejemplo anterior. Las siguientes son otras propiedades del producto escalar, cuyas implicaciones geométricas veremos más adelante.

Teorema 9 [*Otras propiedades del producto escalar*].
Si $\mathbf{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$.
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Demostración:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + \ldots + u_nu_n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$ y la suma de cuadrados de números reales siempre es mayor o igual a cero.

2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 0$, si y sólo si, $u_i^2 = 0$, para todo $i = 1, \ldots n$. De donde concluimos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

□

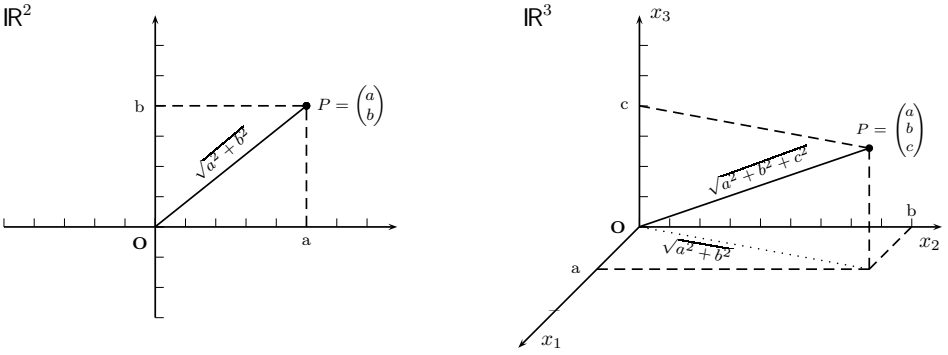


Figura 2.7: Norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Como introducción a una de las aplicaciones geométricas del producto escalar, notemos que si O es el origen de un sistema de coordenadas y P es un punto cuyas componentes son $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, aplicando el Teorema de Pitágoras, la magnitud del segmento dirigido $\overline{OP}$, hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos otros dos lados (catetos) tienen magnitudes a y b, es $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$, como vemos en la Fig. 2.7-izquierda. De la misma forma, si estamos en el espacio y P es un punto cuyas componentes son $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, aplicando el Teorema de Pitágoras dos veces, obtenemos que la magnitud del segmento dirigido $\overline{OP}$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$, como vemos en la Fig. 2.7-derecha.

De otro lado, tenemos que el segmento $\overline{OP}$ lo podemos ver como un vector, así que la magnitud al cuadrado del vector $\overline{OP}$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es la suma de los cuadrados de las componentes del vector. Esta observación, nos induce a una definición de magnitud de un vector, la cual en adelante llamamos norma.

Definición 12 [*Norma*].[9] Definimos $\|\mathbf{u}\|$, la *norma del vector* $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$, como la raíz cuadrada de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$; es decir,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Ejemplo 20. Dados el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ y los puntos $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculemos $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\overline{PQ}\|$.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{30} \approx 5,477$$

$$\|\overline{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

□

Las propiedades algebraicas de la norma de un vector, que deducimos de manera inmediata de los Teoremas 8 y 9, están contenidas en el siguiente teorema.

Teorema 10 [*Propiedades de la norma*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y el escalar α, tenemos que

1. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Demostración:

1. $\|\alpha\mathbf{u}\| = \sqrt{\alpha\mathbf{u} \cdot \alpha\mathbf{u}} = \sqrt{\alpha^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. □

Decimos que el vector $\mathbf{u}$ es *unitario* cuando $\|\mathbf{u}\| = 1$. Es fácil ver que, si $\mathbf{u}$ es un vector no nulo, $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ es un vector unitario, que por ser múltiplo escalar positivo de $\mathbf{u}$, tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{u}$. $\left(-\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right.$ es otro vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$ pero de sentido contrario. ¿Existe otro vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$?$\left.\right)$

Ejemplo 21. Encontremos un vector unitario en la dirección de

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[9]En la literatura, al igual que al principio de este capítulo, aparecen otros nombres, como *magnitud* [16] y *longitud* [7] [16], para referirse a la norma de un vector.

Dado que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$, tenemos que $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$, ya que, por ser un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, tiene su misma dirección y su norma es 1,

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1/\sqrt{11})^2+(-1/\sqrt{11})^2+(3/\sqrt{11})^2}$$
$$= \sqrt{1/11+1/11+9/11} = 1.$$

□

Ejemplo 22. Los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, presentados en el Ejemplo 2, Pág. 47, tienen norma 1; es decir, son vectores unitarios. □

Una pregunta que seguramente nos surge es ¿La norma de una suma o diferencia de vectores es la suma o diferencia de las normas de los vectores? y la respuesta es afirmativa sólo en un caso particular; en general, es sólo válida una desigualdad entre estas dos cantidades (*desigualdad triangular*). Para demostrar este resultado, son necesarios los dos siguientes teoremas.

Teorema 11 [*Longitud de las diagonales de un paralelogramo*]. Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, tenemos que

1. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
2. $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

Demostración: Aplicando las propiedades del producto escalar (Teorema 8), tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\ . \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar la segunda propiedad (tomando $-\mathbf{v}$ en lugar de $\mathbf{v}$). □

Teorema 12 [*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, tenemos que

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|.$$

Tenemos la igualdad, si y sólo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (es decir, si y sólo si, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$.)

Demostración: Por las propiedades del producto escalar (Teorema 8), tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= x^2 \ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + x \ (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = p(x), \end{aligned}$$

donde $p(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio cuadrático con $a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $b = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $c = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Dado que tanto $p(x)$ como a son mayores o iguales a 0, la gráfica del polinomio es una parábola cóncava hacia arriba con vértice en el semiplano superior (por encima del eje X). Recordando que el vértice de $p(x)$ es $\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ [9], tenemos

$$0 \leq c - \frac{b^2}{4a} = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{4\|\mathbf{u}\|^2},$$

de donde obtenemos que

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \ \|\mathbf{v}\|^2$$

y tomando raíz cuadrada, concluimos que

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|.$$

Además, si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= |\lambda\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| \\ &= |\lambda|\|\mathbf{v}\|^2 = |\lambda|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\| \\ &= \|\lambda\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

La demostración del otro sentido de la segunda parte del teorema, con la ayuda de las definiciones sobre ángulos que damos a continuación, la dejamos como ejercicio (Ver Ejercicio 55) □

Teorema 13 [*Desigualdad triangular*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La igualdad se cumple, si y sólo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \geq 0$ o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \quad \text{(Resultado 1 del Teorema 11)}\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|) \text{ (Teorema 12)}\\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Además, si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, con $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| &= \|\lambda\mathbf{v}+\mathbf{v}\| = \|(\lambda+1)\mathbf{v}\|\\ &= |(\lambda+1)|\|\mathbf{v}\| = (\lambda+1)\|\mathbf{v}\|\\ &= \lambda\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|\\ &= \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

La demostración del otro sentido de la segunda parte del teorema, con la ayuda de las definiciones sobre ángulos que damos a continuación, la dejamos como ejercicio (Ver Ejercicio 57) □

Veamos ahora que el producto escalar también nos permite calcular la medida del ángulo entre dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, para lo cual, después de definir ángulo entre vectores, aplicamos el Teorema del Coseno.

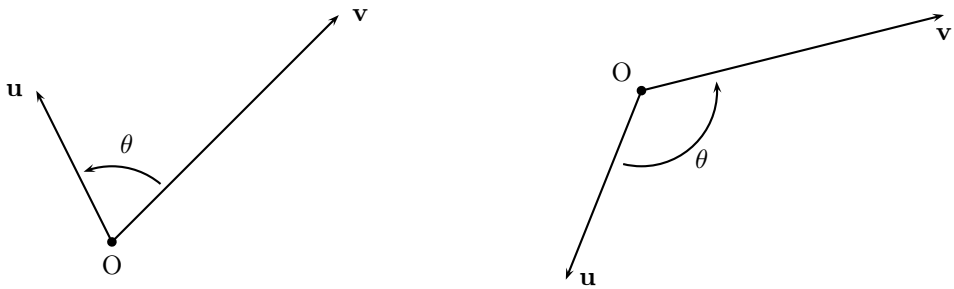


Figura 2.8: Ángulo entre vectores

Definición 13 [*Ángulo entre vectores de R^n*]. Dados los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos el ángulo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como el menor giro positivo[10] que hace uno de ellos para coincidir con la dirección y el sentido del otro,[11] como vemos en la Fig. 2.8.

Notemos que, si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores libres, es posible mover paralelamente uno de ellos para que sus puntos iniciales coincidan, por lo cual, entre vectores que no tienen un mismo origen, también existe un ángulo.

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no nulos de $\mathbb{R}^n$, siempre podemos construir un triángulo como el de la Fig. 2.9[12].

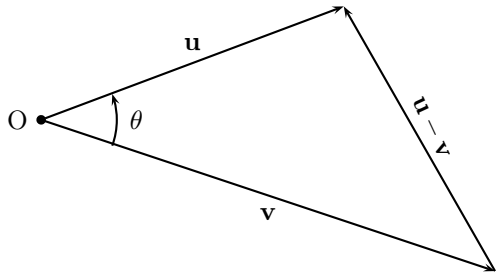


Figura 2.9: Triángulo formado por dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$

Al aplicar el Teorema del Coseno a este triángulo [9], tenemos

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

De otro lado, utilizando el Teorema 11, obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta,$$

de donde, concluimos que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$. Esta igualdad nos brinda una forma para calcular la medida del ángulo entre dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, tomando a θ como el ángulo tal que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}. \tag{2.1}$$

[9] Entendemos por giro positivo aquel que se hace en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

[11] Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido, decimos que el ángulo entre ellos es cero.

[12] El triángulo estará contenido en el plano definido por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y que pasa por el origen (punto inicial común a los dos vectores).

Ejemplo 23. Calculemos el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Empecemos calculando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|^2$ y $\|\mathbf{v}\|^2$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

y

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4.$$

Así que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{1}{2};$$

por lo tanto, el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$, ya que $\pi/3$ es el menor ángulo tal que su coseno es $1/2$. □

De la fórmula (2.1) para calcular el ángulo entre dos vectores, tenemos que $\cos\theta$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ tienen el mismo signo. Así que, como $\cos\theta$ es positivo cuando $0 \leq \theta < \pi/2$, negativo cuando $\pi/2 < \theta \leq \pi$ y cero cuando $\theta = \pi/2$, entonces

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 & \text{si y sólo si} & 0 \leq \theta < \pi/2 \ (\theta \text{ es un ángulo agudo}) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 & \text{si y sólo si} & \pi/2 < \theta \leq \pi \ (\theta \text{ es un ángulo obtuso}) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{si y sólo si} & \theta = \pi/2 \qquad (\theta \text{ es un ángulo recto}) \end{array}$$

Como muy bien sabemos, el concepto de ortogonalidad es fundamental en la geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Con las observaciones anteriores, podemos generalizar este concepto a vectores de $\mathbb{R}^n$.

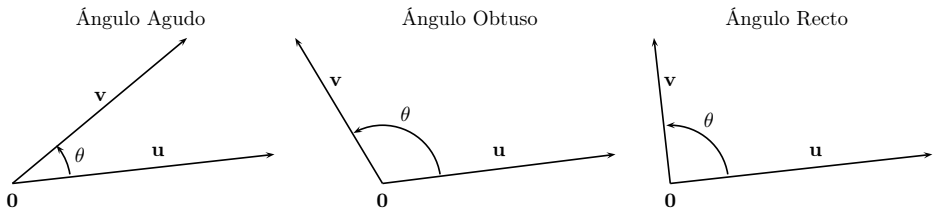


Figura 2.10: Tipos de ángulos entre vectores

Definición 14 [*Vectores ortogonales*].[13] Diremos que los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), si y sólo si, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ejemplo 24. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, determinemos la(s) pareja(s) de vectores ortogonales.

Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, el vector $\mathbf{a}$ es ortogonal al vector $\mathbf{b}$. De la misma forma, como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \neq 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq 0$, el vector $\mathbf{a}$ no es ortogonal al vector $\mathbf{c}$, ni el vector $\mathbf{b}$ es ortogonal al vector $\mathbf{c}$. □

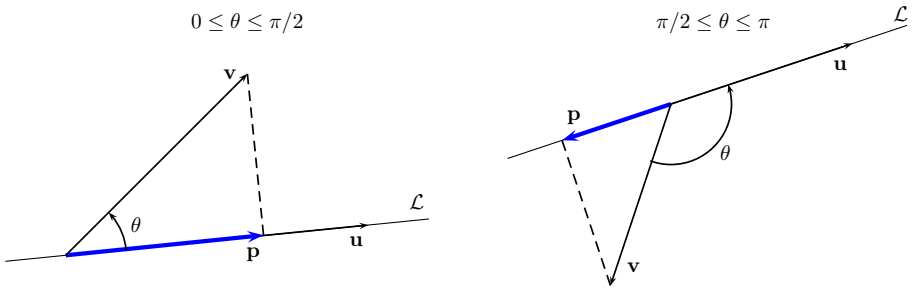


Figura 2.11: Proyección ortogonal de un vector sobre otro vector

Un tema importante, donde está presente el concepto de ortogonalidad, es la proyección ortogonal de un vector sobre otro, como lo describimos a continuación[14]. Dados dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con un

[13] En la literatura [16], el término perpendicular es usado como sinónimo de ortogonal.

[14] Algebraicamente, la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{v}$ sobre otro vector $\mathbf{u}$, ambos en $\mathbb{R}^n$, es el vector $\mathbf{p}$ paralelo a $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$, lo cual se plantea como el Ejercicio 58

mismo punto inicial[15], llamemos $\mathbf{p}$ al vector de la recta $\mathcal{L} = Gen\{\mathbf{u}\}$ que obtenemos al trazar una perpendicular desde el punto final del vector $\mathbf{v}$ sobre la recta $\mathcal{L}$ y θ al ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como vemos en la Fig. 2.11.

Aplicando un resultado básico de geometría,[16] tenemos que $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{v}\||\cos\theta|$. De otro lado, es claro que, si $\tilde{\mathbf{u}}$ es el vector unitario en la dirección y sentido de $\mathbf{u}$ ($\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$), cuando $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (Fig. 2.11-izquierda), tenemos $\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|\tilde{\mathbf{u}}$; y cuando $\pi/2 < \theta \leq \pi$ (Fig. 2.11-derecha), tenemos $\mathbf{p} = -\|\mathbf{p}\|\tilde{\mathbf{u}}$. Usando estas igualdades, cuando $0 \leq \theta \leq \pi/2$, obtenemos

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|\ \tilde{\mathbf{u}} = \|\mathbf{v}\|\ |\cos\theta|\ \tilde{\mathbf{u}} = \|\mathbf{v}\|\ \cos\theta\ \tilde{\mathbf{u}}$$

y cuando $\pi/2 < \theta \leq \pi$, obtenemos

$$\mathbf{p} = -\|\mathbf{p}\|\ \tilde{\mathbf{u}} = -\|\mathbf{v}\|\ |\cos\theta|\ \tilde{\mathbf{u}} = -\|\mathbf{v}\|\ (-\cos\theta)\ \tilde{\mathbf{u}} = \|\mathbf{v}\|\ \cos\theta\ \tilde{\mathbf{u}}.$$

En ambos casos, usando (2.1),

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \|\mathbf{v}\|\cos\theta\ \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= \|\mathbf{v}\|\ \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\ \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
&= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\ \mathbf{u}\ .
\end{aligned}$$

Con base en este resultado, definimos el concepto de proyección ortogonal para vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definición 15 [*Proyección ortogonal sobre un vector*]. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, definimos $\mathbf{proy_u v}$, la *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$, como el vector

$$\mathbf{proy_u v} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\ \mathbf{u}.$$

Si llamamos $\mathbf{v}_c = \mathbf{v} - \mathbf{proy_u v}$, tenemos que, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales (Fig. 2.12-centro), $\mathbf{proy_u v} = \mathbf{0}$ y por tanto, $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}$; si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

[15] Si no tienen un mismo punto inicial, movemos paralelamente uno de ellos o ambos, hasta que sus puntos iniciales coincidan.

[16] En un triángulo rectángulo, la magnitud de un cateto es el producto de la magnitud de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.

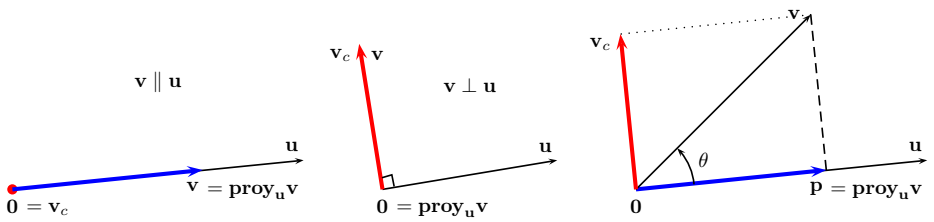


Figura 2.12: Proyección ortogonal y componente vectorial ortogonal

son paralelos (Fig. 2.12-izquierda), $\mathbf{proy_u v} = \mathbf{v}$ y por tanto, $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$; y, en los demás casos (Fig. 2.12-derecha), $\mathbf{v}_c$ y $\mathbf{u}$ son vectores ortogonales y por tanto, $\mathbf{v}_c$ y $\mathbf{proy_u v}$ también lo son. Así, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son ortogonales ni paralelos, podemos expresar el vector $\mathbf{v}$ como la suma de dos vectores ortogonales, $\mathbf{proy_u v}$ y $\mathbf{v}_c$, lo que sugiere llamar a $\mathbf{v}_c$ la *componente vectorial de* $\mathbf{v}$ *ortogonal a* $\mathbf{u}$.

Ejemplo 25. Encontremos la proyección del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$ y la componente vectorial de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{u}$, para cada uno de los siguientes casos, en los que ella esté definida.

$$\textbf{(a)}\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(b)}\ \mathbf{u} = \mathbf{e}_1\ \text{y}\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{(c)}\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\ \text{y}\ \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(d)}\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\ \text{y}\ \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\ \text{y}\ \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Así que

$$\mathbf{proy_u v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\ \mathbf{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v} - \mathbf{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Puesto que el vector $\mathbf{e}_1$ tiene norma 1 y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ 2, tenemos que

$$\mathbf{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\ \mathbf{u} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v} - \mathbf{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Veamos que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ (es decir, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales) y que por tanto

$$\mathbf{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\ \mathbf{u} = \frac{0}{\|\mathbf{u}\|^2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_c = \mathbf{v}.$$

(d) Tenemos que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos), $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -18$ y que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$, entonces

$$\mathbf{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\mathbf{u} = \frac{-18}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

y, por lo tanto, $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$. □

2.8. Rectas, planos e hiperplanos

Aunque estamos familiarizados con la ecuación de la recta en el plano cartesiano (ecuación lineal en dos variables), en esta sección, con base en los conceptos, operaciones y propiedades de los vectores hasta aquí estudiados, presentaremos la ecuación de la recta desde un punto de vista vectorial y, en este mismo sentido, estudiaremos las ecuaciones de los planos y los hiperplanos en $\mathbb{R}^n$. Comencemos con caracterizar los puntos de una recta en $\mathbb{R}^n$.

Definición 16 [*Recta*]. Dado un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y un vector $\mathbf{d}$ no nulo de $\mathbb{R}^n$, diremos que la recta $\mathcal{L}$ que contiene a P y tiene dirección $\mathbf{d}$ es el conjunto formado por P y todos los puntos X que determinan vectores $\overline{PX}$ paralelos a $\mathbf{d}$ (Fig. 2.13). Al vector $\mathbf{d}$ lo llamamos *vector director de la recta*.

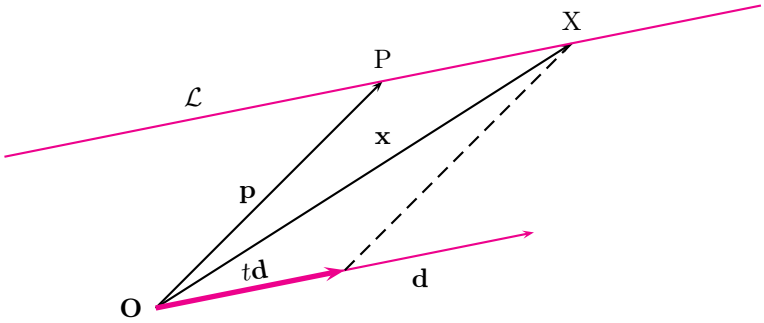


Figura 2.13: Recta con vector director $\mathbf{d}$ que contiene el punto P

De la definición anterior, tenemos que dada una recta $\mathcal{L}$, si P es un punto de la recta, $\mathbf{d}$ su vector director y X un punto cualquiera de la recta, el segmento dirigido o vector libre $\overline{PX}$ es paralelo a $\mathbf{d}$; es decir, es un múltiplo por escalar de $\mathbf{d}$. Como $\overline{PX}$ es la diferencia de

los vectores $\mathbf{x} = \overline{OX}$ y $\mathbf{p} = \overline{OP}$, tenemos que para algún $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{d},$$

de donde,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}. \tag{2.2}$$

A la expresión (2.2) la llamamos *ecuación vectorial de la recta*, la cual también puede expresarse en término de sus componentes. En efecto, si el punto dado de la recta P, el vector director $\mathbf{d}$ y un punto arbitrario X de la recta, tienen componentes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, respectivamente. Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbf{x} = \overline{OX}$, podemos escribir la ecuación (2.2) como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

o, lo que es equivalente,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_1 + td_1 \\ x_2 & = & a_2 + td_2 \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_n + td_n. \end{array} \tag{2.3}$$

A estas últimas ecuaciones las llamamos *ecuaciones paramétricas de la recta.*

Ejemplo 26. Dada la ecuación vectorial de la recta

$$\mathcal{L} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontremos dos puntos P y Q de la recta $\mathcal{L}$.

(b) Determinemos si los puntos $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertenecen a la recta $\mathcal{L}$.

(c) Encontremos un vector $\mathbf{d}$ que sea un vector director de la recta $\mathcal{L}$.

(d) Verifiquemos que el vector $\overline{PQ}$, donde P y Q son los puntos hallados en (a), es paralelo a $\mathbf{d}$, el vector director de la recta $\mathcal{L}$ encontrado en **(c)**.

(a) Para encontrar puntos de la recta $\mathcal{L}$, es suficiente que le demos valores arbitrarios al parámetro t. Por ejemplo, si $t = 1$ y luego $t = -2$ en la ecuación vectorial de la recta, obtenemos dos puntos P y Q de la recta $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos hallar tantos puntos de la recta $\mathcal{L}$ como queramos.

(b) Para determinar si $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ se encuentra en la recta $\mathcal{L}$, tenemos que verificar si existe un escalar t tal que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

o lo que es lo mismo, verificar si existe un escalar t tal que

$$\begin{aligned} 3 &= 2 - t \\ -1 &= -1 \\ -2 &= 3 + 5t. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos que $t = -1$, y si sustituimos el valor de t por -1 en la segunda y tercera ecuación, obtenemos proposiciones verdaderas, lo que implica que al sustituir t por -1 en (2.4), obtenemos una proposición verdadera y por tanto, R es un punto de la recta $\mathcal{L}$.

Con el mismo razonamiento, para verificar si S es un punto de la recta $\mathcal{L}$, debemos verificar si existe t tal que

$$\begin{aligned} 4 &= 2 - t \\ -1 &= -1 \\ 0 &= 3 + 5t. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $t = -2$, pero al sustituir t por -2 en la tercera ecuación, tenemos $0 = -7$, una proposición falsa. Esto nos indica que S no es un punto de la recta.

(c) De la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$, un vector director de dicha recta es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ o cualquier vector no nulo paralelo a él.

(d) Sabemos que, en término de coordenadas, $\overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$. Y, puesto que $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, podemos concluir que efectivamente $\overline{PQ}$ es paralelo al vector director de la recta $\mathcal{L}$. □

Ejemplo 27. Encontremos una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si la recta contiene a los puntos P y Q, ella tiene la dirección $\mathbf{d} = \overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, una ecuación vectorial de la recta

$$\text{es } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Es natural que la ecuación vectorial de una recta no sea única, puesto que existe un número infinito de puntos y de vectores que pueden ser seleccionados como P y $\mathbf{d}$, respectivamente. De otro lado, un mismo vector puede ser vector director de infinitas rectas, las cuales son un caso particular de las que llamamos *rectas paralelas*.

Definición 17 [*Rectas paralelas*]. Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas en $\mathbb{R}^n$, con vectores directores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, respectivamente. Diremos que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas, si y sólo si, los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son paralelos (Fig. 2.14).

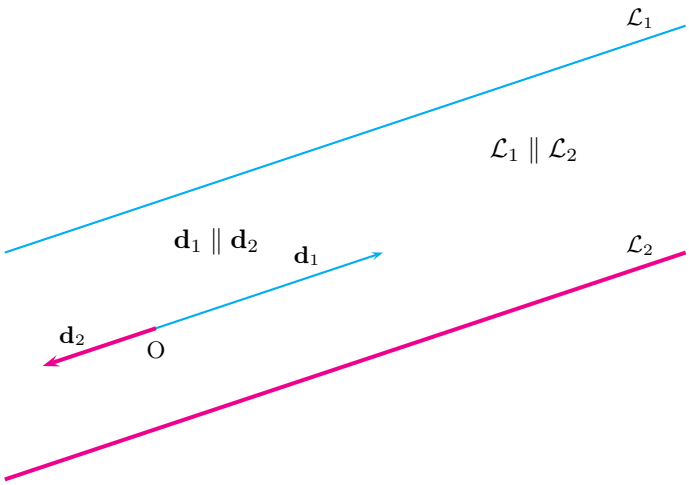


Figura 2.14: Rectas paralelas

Observemos que de acuerdo con el criterio dado de vectores paralelos, podemos decir que dos rectas son paralelas, si y sólo si, el vector director de una de ellas es múltiplo por escalar del vector director de la otra.

Ejemplo 28. Determinemos si las rectas de cada item son paralelas.

(**a**) $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

y $\mathcal{L}_2$ es la recta con ecuación vectorial dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(**b**) $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por el punto $M = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L}_2$ es la recta que pasa por los puntos

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(**a**) Un vector director de la recta $\mathcal{L}_1$ es $\mathbf{d}_1 = \overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ y un vector director de la recta $\mathcal{L}_2$ es $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$. Como $\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{d}_1$, tenemos que $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son paralelos y por tanto, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ también lo son.
(**b**) Tenemos que un vector director de la recta $\mathcal{L}_2$ es

$$\overline{QR} = R - Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, así que los vectores directores de las rectas no son paralelos y por tanto, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tampoco lo son. □

Una aplicación interesante de la anterior definición está dada por la caracterización de la igualdad de dos rectas, como lo plantea el siguiente teorema.

Teorema 14 [*Rectas iguales*].
Dos rectas son iguales, si y sólo si, las rectas son paralelas y tienen al menos un punto en común.

Demostración: Sean $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ vectores directores de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, tomemos dos puntos $P,\ Q \in \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2,\ P \neq Q$. Por definición de recta, existen escalares α y β diferentes de cero tales que $\overline{PQ} = \alpha\mathbf{d}_1$ y $\overline{PQ} = \beta\mathbf{d}_2$, de donde $\alpha\mathbf{d}_1 = \beta\mathbf{d}_2$; por lo tanto, $\mathbf{d}_1$ es paralelo a $\mathbf{d}_2$, y por la definición anterior, $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$.

De otro lado, sea $P \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Si $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$, por la definición de rectas paralelas, $\mathbf{d}_1$ es paralelo a $\mathbf{d}_2$; es decir, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{d}_1 = \lambda\mathbf{d}_2$. Demostremos que cualquier punto de la recta $\mathcal{L}_1$ pertenece también a la recta $\mathcal{L}_2$ y viceversa.

Si $X \in \mathcal{L}_1$, por la definición de recta, $\overline{PX} = \alpha\mathbf{d}_1$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$; por lo tanto, $\overline{PX} = \alpha(\lambda\mathbf{d}_2) = (\alpha\lambda)\mathbf{d}_2$; es decir, existe $\beta = \alpha\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{PX} = \beta\mathbf{d}_2$; por lo tanto, $X \in \mathcal{L}_2$.
Similarmente, Si $X \in \mathcal{L}_2$, por la definición de recta, $\overline{PX} = \rho\mathbf{d}_2$ para algún $\rho \in \mathbb{R}$; por lo tanto, $\overline{PX} = \rho(\frac{1}{\lambda}\mathbf{d}_1) = (\frac{\rho}{\lambda})\mathbf{d}_1$; es decir, existe $\delta = \frac{\rho}{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{PX} = \delta\mathbf{d}_1$; por lo tanto, $X \in \mathcal{L}_1$. □

Al igual que el concepto de rectas paralelas, otro concepto importante en la Geometría Euclidiana es el de rectas ortogonales.

Definición 18 [*Rectas ortogonales*]. Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas con vectores directores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, respectivamente. Diremos que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son ortogonales, si y sólo si, los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son ortogonales (Fig. 2.15); es decir, $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, si y sólo si, $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$

Ejemplo 29. Determinemos si las rectas de cada item son ortogonales.
(**a**) $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
y $\mathcal{L}_2$ es la recta con ecuación vectorial dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

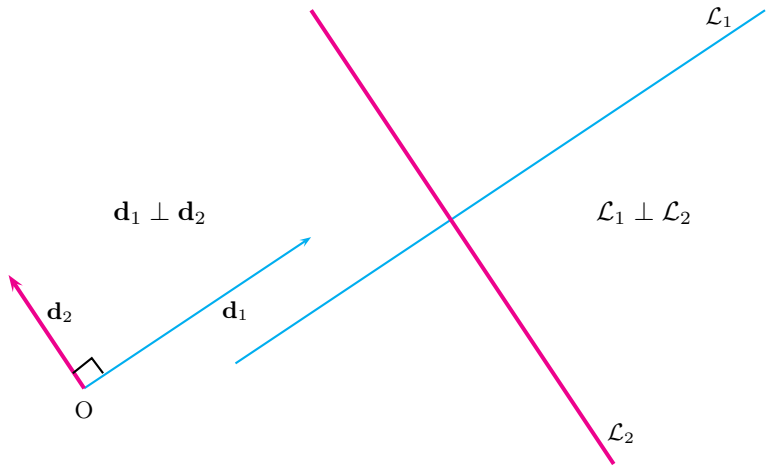


Figura 2.15: Rectas ortogonales

(**b**) $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por el punto $M = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L}_2$ es la recta que pasa por los puntos

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(**a**) Un vector director de la recta $\mathcal{L}_1$ es $\mathbf{d}_1 = \overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y un vector director de la recta $\mathcal{L}_2$ es $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Como $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$, tenemos que $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son ortogonales y por tanto, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ también lo son.
(**b**) Tenemos que un vector director de la recta $\mathcal{L}_2$ es $\mathbf{d}_2 = \overline{QR} = R - Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Como $\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot$

$5 + (-1) \cdot (-2) = 18 \neq 0$, los vectores directores de las rectas no son ortogonales y por tanto, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tampoco lo son. □

Ejemplo 30. Dados los puntos P y Q y la recta $\mathcal{L}_2$ de la parte a) del Ejemplo 29, encontremos:

(a) Una recta paralela a $\mathcal{L}_2$ que pase por P.

(b) Una recta perpendicular a $\mathcal{L}_2$ que pase por Q.

(a) Como la recta que buscamos debe pasar por $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es paralelo a $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, el vector director de $\mathcal{L}_2$; por la Definición 17, una ecuación vectorial de la recta que buscamos es

$$X = P + t\mathbf{d}_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Como la recta que buscamos debe pasar por $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal a $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, el vector director de $\mathcal{L}_2$; por la Definición 18, una ecuación vectorial de la recta que buscamos es

$$X = Q + t\mathbf{d}_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo fueron obtenidos los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$? (Ejercicio 63) □

Al analizar el sistema de ecuaciones (2.3), ecuaciones paramétricas de la recta, observamos que el parámetro t puede ser eliminado, al despejar t de cada ecuación e igualar estas expresiones. Así, reducimos el sistema a otro con $n-1$ ecuaciones lineales y n incógnitas, donde las incógnitas son las componentes de los puntos que conforman la recta. A estas ecuaciones lineales, que podemos escribir como

$$\frac{x_1 - a_1}{d_1} = \frac{x_2 - a_2}{d_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{d_n} \quad \text{siempre que} \quad d_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots n,$$

las llamamos *ecuaciones simétricas de la recta* que pasa por el punto P y tiene vector director $\mathbf{d}$, y, por su simplicidad, son de especial utilidad en $\mathbb{R}^3$. Es de anotar que, cuando $d_i = 0$ para algún i, a cambio de la

fracción $\dfrac{x_i - a_i}{d_i}$ en la anterior expresión, incluimos la ecuación $x_i = a_i$, como mostramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 31. Escribamos un conjunto de ecuaciones simétricas de las rectas $\mathcal{L}_2$ del Ejemplo 28 y de la recta hallada en el Ejemplo 27.

Un conjunto de ecuaciones simétricas de las rectas $\mathcal{L}_2$ del Ejemplo 28 son:

a. $\dfrac{x-0}{4} = \dfrac{y-(-4)}{10} = \dfrac{z-3}{-2}$, las cuales también podemos escribir como $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y+4}{10} = \dfrac{3-z}{2}$.

b. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{5}, \quad z = 1$, las cuales también podemos escribir como $5(x-2) = 2(y-3), \quad z = 1$.

Las ecuaciones simétricas de la recta encontrada en el Ejemplo 27 son $\dfrac{x_1-(-1)}{3} = \dfrac{x_2-2}{-1} = \dfrac{x_3-0}{-1}, \quad x_4 = 1$, las cuales también podemos escribir como $\dfrac{x_1+1}{3} = 2 - x_2 = -x_3, \quad x_4 = 1$. □

De la misma forma como, dado un punto P, al conjunto de puntos X que determinan vectores $\overrightarrow{PX}$ que resultan ser múltiplos por escalar de un vector dado $\mathbf{d}$, lo llamamos recta, al conjunto de puntos X que determinan vectores $\overrightarrow{PX}$ que resultan ser combinación lineal de dos vectores dados $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$, lo llamamos de una manera especial: *Plano*.

Definición 19 [*Plano*]. Dado un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y dos vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ diferentes de cero y no paralelos, diremos que el conjunto de puntos X que determinan vectores $\overrightarrow{PX}$ que son combinación lineal de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$, es el *plano* $\mathcal{P}$ que pasa por el punto P y tiene direcciones $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ (Fig. 2.16). A los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ los llamamos *vectores directores* o *vectores dirección del plano*.

De la definición anterior, tenemos que dado un plano $\mathcal{P}$, si P es un punto del plano, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son dos vectores directores del plano y X es un punto cualquiera del plano, entonces $\overrightarrow{PX} = t\mathbf{c} + s\mathbf{d}$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Así, si llamamos $\mathbf{x}$ al vector $\overrightarrow{OX}$ y $\mathbf{p}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, tenemos que, para $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{c} + s\mathbf{d},$$

lo que es equivalente a

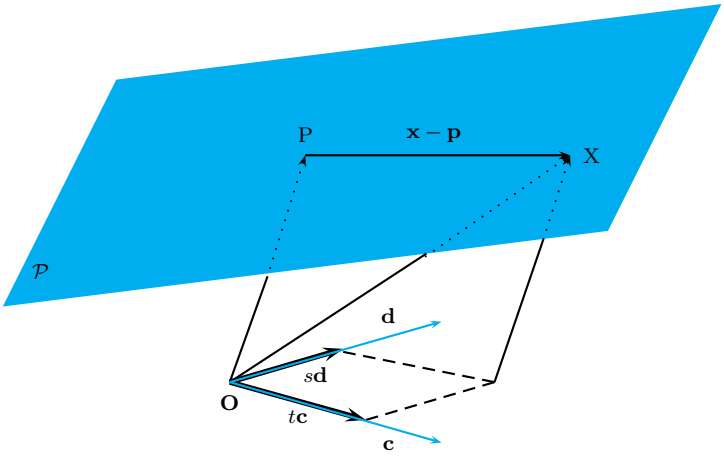


Figura 2.16: Plano con vectores directores **c** y **d** que contiene a P

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{c} + s\mathbf{d},$$

la cual llamamos *ecuación vectorial del plano*. Al expresar esta última ecuación en término de las componentes de los vectores $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tc_1 + sd_1 \\ x_2 &= a_2 + tc_2 + sd_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + tc_n + sd_n. \end{aligned}$$

A estas ecuaciones las llamamos *ecuaciones paramétricas del plano*.

Ejemplo 32. Dadas las ecuaciones paramétricas del plano $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2+t-s \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= 1+5s \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

(a) Encontremos tres puntos P, Q y R del plano $\mathcal{P}$.
(b) Encontremos dos vectores **c** y **d** que sean vectores directores del plano $\mathcal{P}$.
(c) Verifiquemos que los vectores $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son combinaciones lineales de **c** y **d**, los vectores directores del plano $\mathcal{P}$ encontrados en **(b)**.
(d) Determinemos si los puntos $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ se encuentran en el plano $\mathcal{P}$.

(a) Para encontrar puntos del plano $\mathcal{P}$, demos valores arbitrarios a los parámetros t y s. Por ejemplo, si $t = s = 0$ en las ecuaciones paramétricas del plano, tenemos que $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = -2$, por lo tanto, el punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. Similarmente, si $t = 1$ y $s = 0$, obtenemos que el punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. Finalmente, si $t = 1$ y $s = -1$, obtenemos que $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. De esta forma, podemos hallar tantos puntos del plano $\mathcal{P}$ como queramos.

(b) Escribiendo las ecuaciones paramétricas del plano $\mathcal{P}$ en forma vectorial, tenemos que la ecuación vectorial del plano $\mathcal{P}$ es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, dos vectores directores del plano son $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) De la definición de vector libre, tenemos que $\overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overline{QR} = R - Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ahora, veamos que estos vectores son combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ hallados en **(b)**; es decir, que los sistemas de ecuaciones lineales, cuyas matriz aumentada conjunta es

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

son consistentes. Efectivamente, al escalonar esta matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

de donde, podemos concluir que los sistemas son consistentes, y por lo tanto, los vectores $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son combinaciones lineales de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$.

(d) Para determinar si M y N se encuentran en el plano $\mathcal{P}$, tenemos que verificar si existen escalares t, s, α y β tales que

$$M = P + t\mathbf{c} + s\mathbf{d} \quad y \quad N = P + \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}$$

donde, P es el punto encontrado en **(a)** y $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son los vectores encontrados en **(b)**. En otras palabras, veamos si $M - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $N - P = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ son combinaciones lineales de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$; lo cual es equivalente a verificar si los sistemas de ecuaciones lineales, cuyas matriz aumentada conjunta es

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

son consistentes. Al escalonar esta matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

de donde, podemos concluir que el primer sistema es inconsistente y que el segundo es consistente; y por lo tanto, que M no se encuentra en el plano $\mathcal{P}$, mientras que N si.

□

Ejemplo 33. Encontremos una ecuación vectorial del plano que contiene los puntos

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

El plano que contiene los puntos P, Q y R tiene como vectores directores a $\mathbf{d}_1 = \overline{PQ}$ y $\mathbf{d}_2 = \overline{PR}$, como lo ilustramos en la Fig. 2.17.

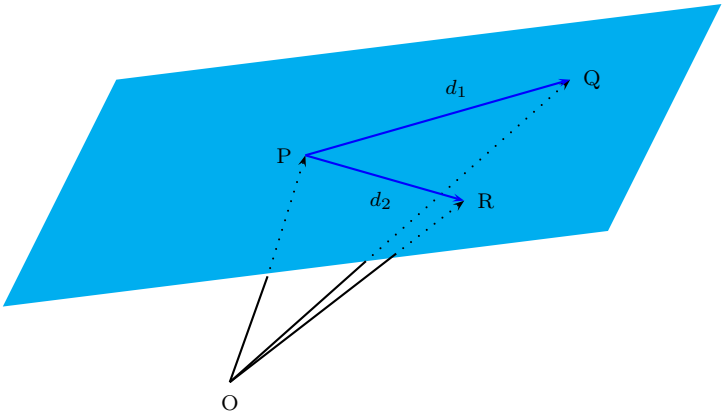


Figura 2.17: Plano que contiene tres puntos dados

Para el caso que nos ocupa, calculemos estos vectores.

$$\mathbf{d}_1 = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_2 = \overline{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Así, que una ecuación vectorial del plano que pasa por estos puntos es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad t,\ s \in \mathbb{R}.$$

□

Al igual que para las rectas, es de esperarse que la ecuación de un plano no sea única; por ello, la importancia de establecer criterios claros para determinar cuando dos ecuaciones corresponden a un mismo plano. Empecemos por precisar cuando dos planos son paralelos.

Definición 20 [*Planos paralelos*]. Decimos que dos planos son paralelos, si y sólo si, los vectores directores de uno de los planos son combinación lineal de los vectores directores del otro plano.[17](Fig. 2.18).

[17]Es importante anotar que, por la condición de independencia lineal de los conjuntos formados por los vectores directores de cada plano, si los vectores directores de un plano son combinación lineal de los vectores directores del otro plano, entonces los vectores directores de este último plano también son combinación lineal de los vectores directores del primero. (Ejercicio 39).

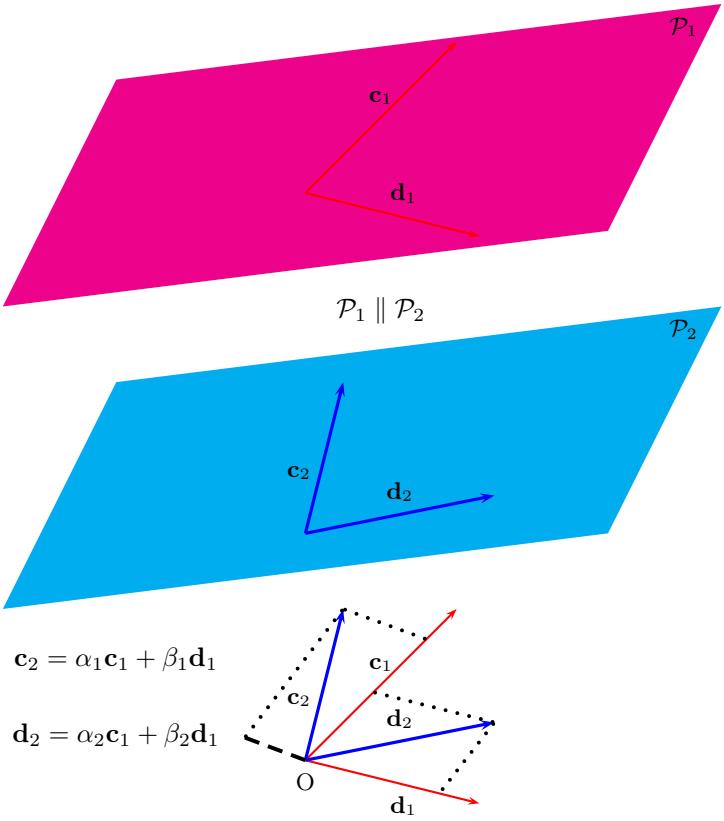


Figura 2.18: Planos paralelos

Ejemplo 34. Determinemos si el plano $\mathcal{P}_1$ que contiene el punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y tiene vectores directores $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ es paralelo al plano $\mathcal{P}_2$ que contiene los puntos

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Del Ejemplo 33, tenemos que dos vectores directores del plano que contiene los puntos P, Q y R son

$$\mathbf{c}_1 = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_1 = \overline{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para determinar si los planos señalados son paralelos, tenemos que chequear si existen escalares α, β, λ y μ, tales que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Al escalonar la matriz aumentada conjunta correspondiente a los sistemas anteriores, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 16 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

lo que implica que ambos sistemas son consistentes; es decir, que efectivamente existen escalares α, β, λ y μ, que satisfacen (2.5), lo que significa que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$ son combinaciones lineales de $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{d}_2$, por lo tanto, los planos son paralelos. □

Al igual que con el concepto de rectas paralelas, una aplicación interesante del concepto anterior es una caracterización de planos iguales, como lo expresa el siguiente teorema, cuya demostración la dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 71).

Teorema 15 [*Planos iguales*].
Dos planos de $\mathbb{R}^n$ son iguales, si y sólo si, los dos planos son paralelos y tienen al menos un punto común.

Es natural, que nos preguntemos ahora qué significa que una recta y un plano sean paralelos y qué significa que sean ortogonales; veamos la definición y revisémosla en un par de ejemplos.

Definición 21 [*Recta y plano paralelos*]. Sean $\mathcal{L}$ una recta con vector director $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}$ un plano con vectores directores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}^n$. Diremos que la recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$, si y sólo si, el vector $\mathbf{d}$ es combinación lineal de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$ (Fig. 2.19).

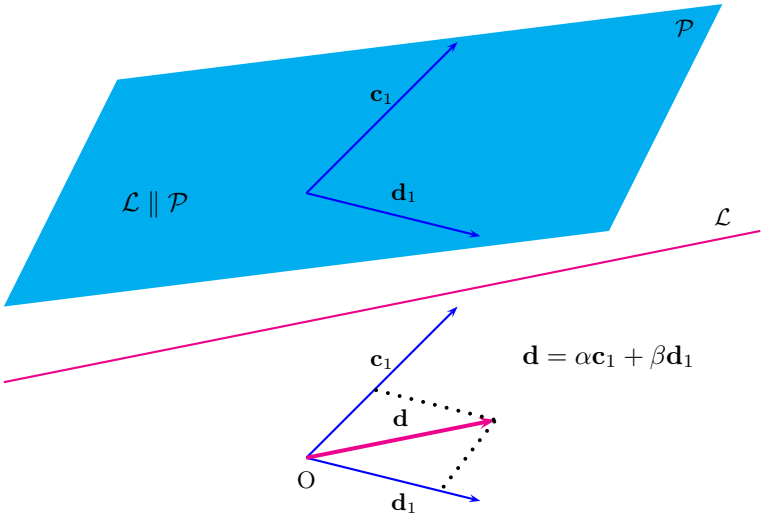


Figura 2.19: Recta y plano paralelos

Ejemplo 35. Determinemos si la recta $\mathcal{L}$, cuya ecuación vectorial es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, es paralela al plano $\mathcal{P}$, cuya ecuación vectorial es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$. Un vector director de la recta $\mathcal{L}$ es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ y dos vectores directores del plano $\mathcal{P}$ son $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Veamos si $\mathbf{d}$ es combinación lineal de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$; es decir, si el sistema, cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \end{array}\right),$$

es consistente. Al escalonar la matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{array}\right),$$

lo cual nos muestra que el sistema no tiene solución; es decir, que el vector director de la recta $\mathcal{L}$ no es combinación lineal de los vectores directores del plano $\mathcal{P}$; por lo tanto, la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ no son paralelos. □

Una aplicación inmediata de la Definición 21 es la caracterización de la inclusión de una recta en un plano de $\mathbb{R}^n$, lo cual planteamos en el teorema siguiente.

Teorema 16 [*Recta incluida en un plano*].
Una recta está totalmente incluida en un plano de $\mathbb{R}^n$, si y sólo si, la recta es paralela al plano y, la recta y el plano tienen al menos un punto en común.

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto P y cuyo vector director es $\mathbf{d}$ (ecuación vectorial de $\mathcal{L}$: $P+t\mathbf{d},\ t \in \mathbb{R}$) y $\mathcal{P}$ el plano que contiene el punto Q y cuyos vectores directores son $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$ (Ecuación vectorial de $\mathcal{P}$: $Q + r\mathbf{c}_1 + s\mathbf{d}_1,\ r, s \in \mathbb{R}$).

Supongamos que $\mathcal{L}$ está totalmente contenida en $\mathcal{P}$ ($\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$). Como $P \in \mathcal{L}$, entonces al menos P es un punto común de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ ($P \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}$); por lo tanto, otra ecuación vectorial de $\mathcal{P}$ es $P + r\mathbf{c}_1 + s\mathbf{d}_1,\ r, s \in \mathbb{R}$. Además, como $P + t\mathbf{d} \in \mathcal{L}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $P + t\mathbf{d} \in \mathcal{P}$ para todo $t \in \mathbb{R}$; por lo tanto, existen escalares r_0 y s_0 tales que

$$P + t\mathbf{d} = P + r_0\mathbf{c}_1 + s_0\mathbf{d}_1,\ t \in \mathbb{R},$$

de donde podemos concluir, tomado $t = 1$, que existen escalares r_0 y s_0 tales que

$$\mathbf{d} = r_0\mathbf{c}_1 + s_0\mathbf{d}_1;$$

es decir, $\mathbf{d}$ es combinación lineal de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$ y por lo tanto, $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathcal{P}$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathcal{P}$ y que existe M, un punto común de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$, lo cual significa que $M \in \mathcal{L}$, $M \in \mathcal{P}$ y que existen escalares α y β tales que

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{c}_1 + \beta\mathbf{d}_1; \tag{2.6}$$

por lo tanto, otra ecuación vectorial de $\mathcal{L}$ es $M + t\mathbf{d},\ t \in \mathbb{R}$ y de $\mathcal{P}$ es $M + r\mathbf{c}_1 + s\mathbf{d}_1,\ r, s \in \mathbb{R}$.

Para probar que $\mathcal{L}$ está totalmente incluida en $\mathcal{P}$, demostremos que cualquier punto de $\mathcal{L}$ también pertenece a $\mathcal{P}$. Sea X un punto de $\mathcal{L}$; entonces existe un escalar t_0 tal que $X = M + t_0\mathbf{d}$; por lo tanto, usando (2.6), tenemos que existen escalares $r_0 = t_0\alpha$ y $s_0 = t_0\beta$ tales que

$$X = M + t_0(\alpha\mathbf{c}_1 + \beta\mathbf{d}_1) = M + r_0\mathbf{c}_1 + s_0\mathbf{d}_1;$$

lo que significa que X pertenece a $\mathcal{P}$.

□

Ejemplo 36. Encontremos una recta contenida en el plano $\mathcal{P}$ del Ejemplo 35.

Por el teorema anterior, para que una recta esté contenida en el plano $\mathcal{P}$, la recta debe pasar por un punto de $\mathcal{P}$ y su vector director debe ser combinación lineal de los vectores directores de $\mathcal{P}$. Como $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, los vectores directores de $\mathcal{P}$, una ecuación vectorial de una recta contenida en $\mathcal{P}$ es

$$X = P + t\mathbf{d},\ t \in \mathbb{R}.$$

¿Existe otra recta contenida en $\mathcal{P}$? ¿Cuántas rectas contenidas en $\mathcal{P}$ existen? (Ejercicio75)

□

Definición 22 [*Recta y plano ortogonales*]. Sean $\mathcal{L}$ una recta con vector director $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{P}$ un plano con vectores directores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}^n$. Diremos que la recta $\mathcal{L}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, si y sólo si, el vector $\mathbf{d}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{c}_1$, como a $\mathbf{d}_1$ (Fig. 2.20).

Ejemplo 37. Determinemos si la recta $\mathcal{L}$ que contiene a los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es ortogonal al plano que contiene al punto $M = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y tiene vectores directores $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y

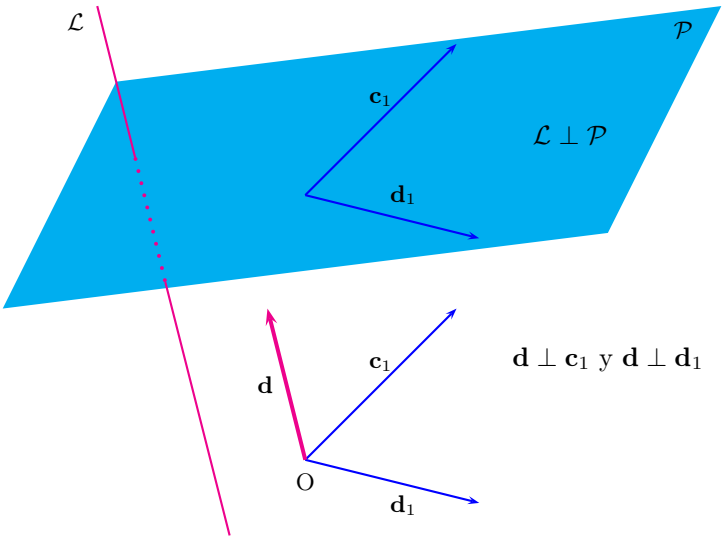


Figura 2.20: Recta y plano ortogonales

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Un vector director de la recta $\mathcal{L}$ es $\mathbf{d} = \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Veamos si éste es ortogonal a los vectores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$. Para tal efecto, calculemos

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$$

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 + 0 - 6 = 0.$$

Así que la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ son ortogonales. □

Ahora, así como podemos estar interesados en todos los puntos que, a partir de un punto fijo, determinan vectores paralelos a un vector

dado (los que forman una recta), podemos estar interesados en los puntos que, a partir de un punto fijo, determinan vectores ortogonales a un vector dado. A este conjunto de puntos lo llamamos *hiperplano*.

Definición 23 [*Hiperplano*]. Dados un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y un vector no nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$, diremos que el conjunto formado por P y todos los puntos X que determinan vectores $\overline{PX}$ ortogonales a $\mathbf{n}$ es el *hiperplano* que contiene al punto P y es ortogonal al vector $\mathbf{n}$. Al vector $\mathbf{n}$ lo llamamos *vector normal* del hiperplano .

Teniendo en cuenta la definición de vectores ortogonales, tenemos que dado un punto P, los vectores $\overline{PX} = \overline{OX} - \overline{OP}$ ortogonales a $\mathbf{n}$ son los que hacen que $\overline{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$. Así que, si llamamos $\mathbf{x}$ al vector $\overline{OX}$ y $\mathbf{p}$ al vector $\overline{OP}$, la ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ ó } \text{ equivalentemente } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \qquad (2.7)$$

es la ecuación del hiperplano que pasa por P y es ortogonal a $\mathbf{n}$. A esta ecuación la llamamos *ecuación normal del hiperplano*.

Al expresar el primer producto escalar de (2.7), en término de las componentes de los vectores $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, obtenemos

$$l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \ldots + l_n(x_n - a_n) = 0$$

ó equivalentemente,

$$l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n = d \qquad \text{con } \; d = l_1a_1 + l_2a_2 + \ldots + l_na_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}.$$

A esta ecuación la llamamos *ecuación general del hiperplano* que pasa por P y es ortogonal a $\mathbf{n}$.

Ejemplo 38. Hallemos una ecuación del hiperplano que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es ortogonal al Eje X.

Un vector que tiene la dirección del Eje X es $\mathbf{e}_1$. Así que una ecuación para este hiperplano es

$$1(x-2)+0(y+3)+0(z-5)+0(w-1)=0$$

o equivalentemente,

$$x-2=0 \qquad \text{ó} \qquad x=2.$$

□

Como sucedió con las rectas y sus vectores directores, el paralelismo y la ortogonalidad de dos hiperplanos depende del paralelismo y la ortogonalidad de sus vectores normales, respectivamente, como lo expresan las siguientes definiciones.

Definición 24 [*Hiperplanos paralelos*]. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos hiperplanos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente. Diremos que los hiperplanos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son paralelos, si y sólo si, los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son paralelos.

Ejemplo 39. Encontremos una ecuación del hiperplano $\mathcal{H}_1$ de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen y es paralelo al hiperplano $\mathcal{H}_2$ definido por $3x_1-2x_3+x_4=5$.

Si $\mathcal{H}_1$ es paralelo a $\mathcal{H}_2$, podemos tomar como vector normal de $\mathcal{H}_1$ el mismo vector normal de $\mathcal{H}_2$, el cual tendrá como componentes los coeficientes respectivos de las variables en la ecuación general del hiperplano $\mathcal{H}_2$; es decir, $\mathbf{n}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como un punto de $\mathcal{H}_1$ es el origen, una ecuación del hiperplano es $(\mathbf{x}-\mathbf{0})\cdot\mathbf{n}_2=0$; es decir,

$$3x_1-2x_3+x_4=0.$$

¿Existe otro hiperplano $\mathcal{H}_1$ que cumpla con las mismas condiciones? (Ejercicio 82) □

Definición 25 [*Hiperplanos ortogonales*]. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos hiperplanos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente. Diremos que los hiperplanos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son ortogonales, si y sólo si, los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son ortogonales.

Ejemplo 40. Encontremos una ecuación de un hiperplano $\mathcal{H}_1$ de $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen y que sea ortogonal al hiperplano $\mathcal{H}_2$ definido por $3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$.

Si $\mathcal{H}_1$ es ortogonal a $\mathcal{H}_2$, $\mathbf{n}_1$, el vector normal de $\mathcal{H}_1$, debe ser ortogonal a $\mathbf{n}_2$, el vector normal de $\mathcal{H}_2$, el cual tiene como componentes los coeficientes respectivos de las variables en la ecuación general de $\mathcal{H}_2$; es decir, $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; esto quiere decir que $\mathbf{n}_1$ debe ser tal que $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$; por lo tanto, podemos tomar $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como un punto de $\mathcal{H}_1$ es el origen, su ecuación es $(\mathbf{x} - \mathbf{0}) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$; es decir,

$$x_1 + 2x_5 = 0.$$

¿Existe otro hiperplano $\mathcal{H}_1$ que cumpla con las mismas condiciones? (Ejercicio 85)

□

Como casos especiales, en $\mathbb{R}$, los hiperplanos son puntos; en $\mathbb{R}^2$, los hiperplanos son rectas y, en $\mathbb{R}^3$, los hiperplanos coinciden con los planos. Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de los casos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$ (Ejercicio 87). Para demostrar la afirmación en el caso de $\mathbb{R}^3$, requerimos el cálculo de un vector ortogonal a otros dos, razón por la cual introducimos una operación cuya definición está **restringida** a $\mathbb{R}^3$ y que llamamos *producto vectorial*.

Definición 26 [*Producto vectorial*].[18] Dados dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, definimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, el *producto vectorial* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como el vector[19]

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 41. Demostremos que $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$.[20]

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ -(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3$$

y de manera similar, tenemos

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ -(0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1$$

y

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ -(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$$

□

En el siguiente teorema, consignamos las principales propiedades algebraicas de este producto.

Teorema 17 [*Propiedades del producto vectorial*].
Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ y λ es un escalar, entonces:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. *Ley anticonmutativa*
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. *Ley distributiva para la suma por derecha*
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. *Ley distributiva para la suma por izquierda*
4. $\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v})$.

[18] En la literatura, otro nombre que recibe esta operación es *producto cruz* [16].
[19] En el Capítulo 3, veremos que este producto lo podemos expresar usando determinantes, lo cual es fácil de recordar (ver Ejercicio 38 del Cap.3, Pág.206).
[20] Como anotamos antes, en la literatura, los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ también son denotados como $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente. Así, los resultados de este ejemplo se escribirían como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, respectivamente [19].

5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
7. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
8. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$. *Propiedad de ortogonalidad*
9. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. *Propiedad del producto mixto*

Demostración: Demostremos las Propiedades 1 y 8. El resto de las demostraciones las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 88). Para demostrar la Propiedad 1, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -(u_2v_3 - u_3v_2) \\ (u_1v_3 - u_3v_1) \\ -(u_1v_2 - u_2v_1) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} v_2u_3 - v_3u_2 \\ -(v_1u_3 - v_3u_1) \\ v_1u_2 - v_2u_1 \end{pmatrix} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Para la demostración de la Propiedad 8, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 \\ &= u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 - u_1v_3u_2 + u_3v_1u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

y de igual manera, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)v_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)v_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)v_3 \\ &= u_2v_3v_1 - u_3v_2v_1 - u_1v_3v_2 + u_3v_1v_2 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Es importante anotar que la Propiedad 8 nos dice que el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ siempre es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$, como a $\mathbf{v}$, así que la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ queda determinada por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. El sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ depende del tipo de sistema de coordenadas: *derecho ó izquierdo*[21] (Fig. 2.21).

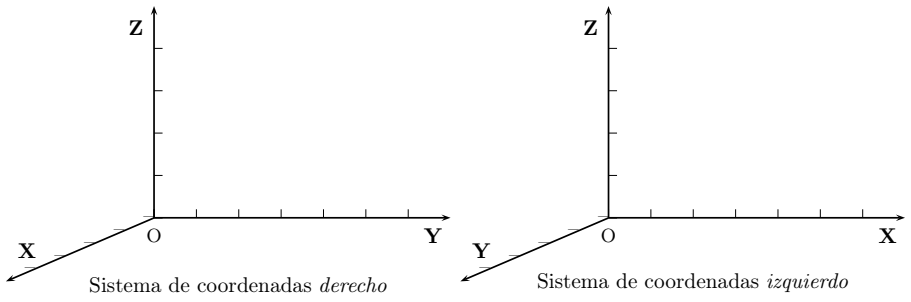


Figura 2.21: Orientación de una sistema de coordenadas

En un sistema de coordenadas derecho, el sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dado por el dedo pulgar de la mano derecha cuando ésta se coloca de tal forma que el resto de dedos apunten en el sentido de $\mathbf{u}$ y cierren hacia $\mathbf{v}$ (Fig. 2.22-derecha).

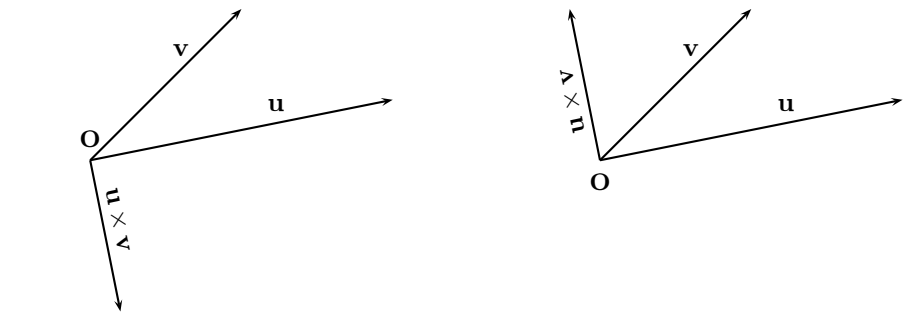


Figura 2.22: Dirección y sentido del producto vectorial

[21] Un *sistema de coordenadas derecho* tiene definido los semiejes positivos de tal forma que, empezando con los dedos de la mano derecha (excepto el pulgar) en la dirección del semieje positivo de **X**, al cerrarlos hacia el semieje positivo de **Y**, el pulgar apunta en la dirección del semieje positivo de **Z**. Si ocurre lo mismo, pero usando la mano izquierda, tenemos un *sistema de coordenadas izquierdo*

Para terminar de caracterizar el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, nos falta saber como calcular su norma, lo cual consignamos en el siguiente teorema.

Teorema 18 [*Identidad de Lagrange y Norma del producto vectorial*].
Dados dos vectores arbitrarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$, si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces tenemos las siguientes igualdades.

1. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. *Identidad de Lagrange*
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$. *Norma del producto vectorial*

Demostración:

1. Usando las Propiedades 7 y 9 del teorema anterior y las propiedades del producto escalar, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \quad \text{Propiedad 9, Teorema 17 con } \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}] \quad \text{Propiedad 7, Teorema 17} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

2. Usando el anterior resultado, las propiedades del producto escalar y la identidad trigonométrica básica ($\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$), tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

   Por tanto, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$. □

De este último resultado, obtenemos una nueva caracterización de vectores paralelos, la cual consignamos en el siguiente corolario. Sin embargo, notemos que, para determinar paralelismo entre vectores, es más práctico utilizar el criterio basado en el producto por escalar.

Corolario 18.1 [Otro criterio de paralelismo entre vectores de $\mathbb{R}^3$]
Dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ son paralelos, si y sólo si, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Demostración: Tenemos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, si y sólo si, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 0$, pero $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$ y puesto que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos, tenemos que $\operatorname{sen}\theta = 0$, por lo tanto $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, lo que implica que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. De otro lado, si $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, por las Propiedades 4 y 6 del Teorema 17,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

Otra consecuencia del anterior teorema es la interpretación geométrica de su segundo resultado, la cual consignamos en el siguiente corolario.

Corolario 18.2 [*Área de un paralelogramo*].
El área del paralelogramo cuyos lados no paralelos están dados por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por la magnitud del producto vectorial de ellos, es decir, por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ (Fig.2.23).

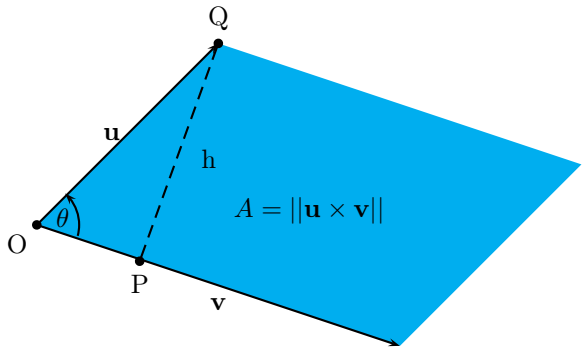


Figura 2.23: Área de un paralelogramo

Demostración: Consideremos el paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores (libres) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y θ el ángulo entre ellos, como muestra la Fig. 2.23.

Si observamos que h, la altura del paralelogramo, está dada por[22] $h = \|\mathbf{u}\| \operatorname{sen}\theta$ y recordamos que A, el área del paralelogramo, es base por altura, tenemos

$$A = \|\mathbf{v}\|h = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|,$$

según el Resultado 2 del Teorema 18. □

[22] Usando la propiedad trigonométrica en el triángulo rectángulo OPQ de la Fig. 2.23 que plantea que $\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$.

A su vez, este resultado nos permite calcular el volumen de un paralelepípedo en término de los vectores que definen sus tres aristas no paralelas, como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 18.3 [*Volumen de un paralelepípedo*].
El volumen del paralelepípedo cuyas aristas no paralelas están dadas por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$ está dado por el valor absoluto del *producto mixto* de ellos, es decir, por $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

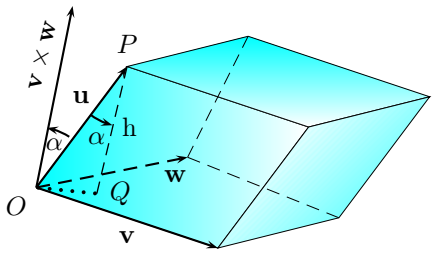


Figura 2.24: Volumen de un paralelepípedo [$V = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$]

Demostración: Consideremos el paralelepípedo cuyas aristas no paralelas son los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ y sea α el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, como muestra la Fig. 2.24 (recordemos que el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a la base del paralelepípedo definida por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$). Observemos que h, la altura del paralelepípedo, está dada por[23] $h = \|\mathbf{u}\||\cos\alpha|$ (h es paralela a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$) y recordemos que V, el volumen del paralelepípedo, es el área de la base por la altura. Por el resultado anterior, el área de la base es $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ y usando 2.1, tenemos

$$\begin{aligned} V = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|h = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|\|\mathbf{u}\||\cos\alpha| &= |\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\alpha| \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|. \end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata de este resultado es una caracterización de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Lo anterior es equivalente a determinar cuándo existe un plano que contenga a tres vectores dados (Ejercicio 77). En este caso, diremos que los tres vectores son *coplanares*.

[23] Usando la propiedad trigonométrica en el triángulo rectángulo OPQ de la Fig. 2.24 que plantea que $\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$.

Corolario 18.4 [*Vectores coplanares*].
Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ son coplanares, si y sólo si, $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = 0$.

Demostración: El resultado lo obtenemos del hecho que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son coplanares, si y sólo si, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores no tiene altura (o ésta es cero), por lo tanto, su volumen será cero. La ecuación la obtenemos del Corolario 18.3. □

Finalmente, la Propiedad 8 del Teorema 17 y el anterior resultado nos permiten encontrar la ecuación normal de un plano a partir de su ecuación vectorial, al tiempo que nos muestra que un hiperplano en $\mathbb{R}^3$ es un plano, como fue el propósito de introducir el producto vectorial, lo cual lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 19 [*Ecuación normal del plano en* $\mathbb{R}^3$].
El plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto P y tienen vectores directores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$, y el hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ que contiene el punto P y es ortogonal a $\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ son iguales (Fig. 2.25).

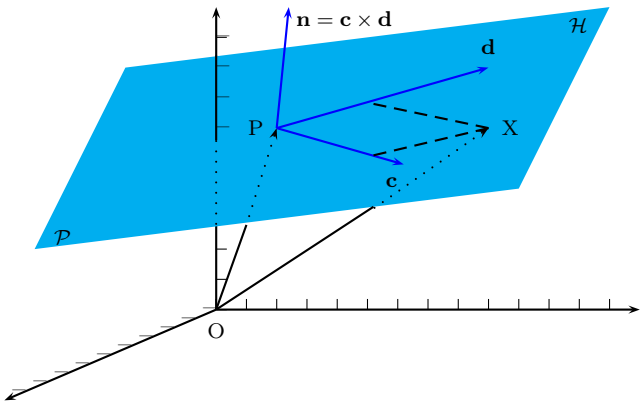


Figura 2.25: Equivalencia entre planos e hiperplanos en $\mathbb{R}^3$

Demostración: Sea $X \in \mathcal{P}$. Por la definición de plano, $\overline{PX}$ es una combinación lineal de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$, es decir, existen escalares α y β tales que $\overline{PX} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}$. Por la Propiedad 8 del Teorema 17,

$$\overline{PX}\cdot\mathbf{n} = (\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \alpha\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+\beta\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \alpha\,0+\beta\,0 = 0,$$

por lo tanto, $\overline{PX}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$, de donde, por la definición de hiperplano, concluimos que $X \in \mathcal{H}$.

Ahora, sea $X \in \mathcal{H}$. Por la definición de hiperplano, $\overline{PX}$ es ortogonal a $\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$, por lo tanto $\overline{PX} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0$, lo cual , por el Corolario 18.4, significa que $\overline{PX}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son coplanares. Como $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores diferentes de cero y no paralelos (¿Por qué?), existen escalares α y β tales que $\overline{PX} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}$. Por la definición de plano, concluimos que $X \in \mathcal{P}$. □

Este resultado no sólo nos permite otra forma de caracterizar los puntos que conforman un plano (Ecuación normal del plano), sino que también enriquece tanto el análisis como el cálculo en la Geometría Euclidiana del espacio (o en $\mathbb{R}^3$) como lo planteamos en los siguientes teoremas sobre paralelismo y ortogonalidad entre planos, y entre rectas y planos en el espacio, donde algunas demostraciones las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 97).

Teorema 20 [*Paralelismo y ortogonalidad de planos en* $\mathbb{R}^3$].
Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos planos en $\mathbb{R}^3$, con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente.

1. Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos, si y sólo si, los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ lo son; es decir, $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$, si y sólo si, $\mathbf{n}_1$ es múltiplo por escalar de $\mathbf{n}_2$ (Fig. 2.26-izquierda).
2. Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son ortogonales, si y sólo si, los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ lo son; es decir, $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, si y sólo si, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ (Fig. 2.26-derecha).

Demostración: La demostración de estas dos proposiciones se siguen del resultado del Teorema 19 (en $\mathbb{R}^3$, un plano es un hiperplano) y las Definiciones 24 y 25, sobre paralelismo y ortogonalidad de hiperplanos. □

Ejemplo 42. Determinemos si el plano $\mathcal{P}_1$ del Ejemplo 34, Pág. 97, es paralelo o es ortogonal al plano $\mathcal{P}_2$ definido por $3x - z = 4$.

Por el Teorema 19, un vector normal de $\mathcal{P}_1$ es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$ y, por la definición de hiperplano, un

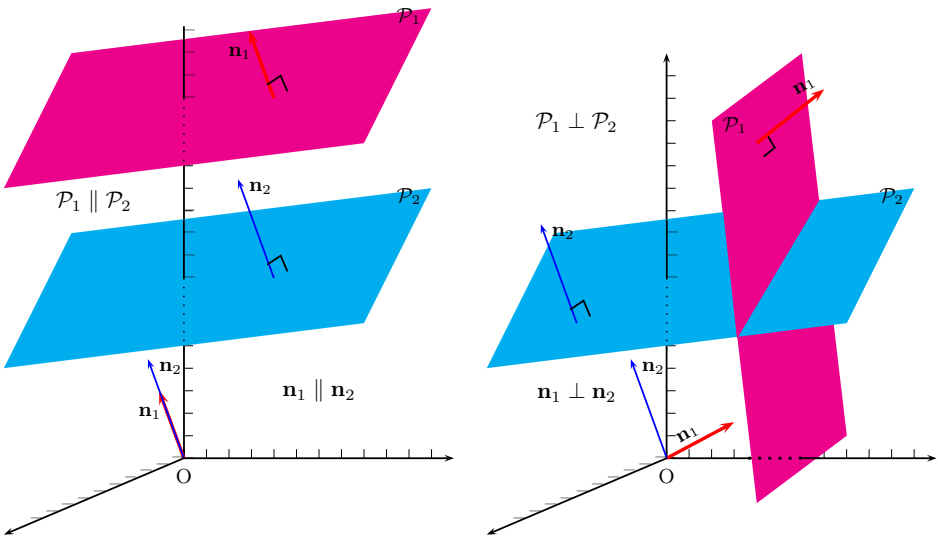


Figura 2.26: Paralelismo y ortogonalidad de planos en $\mathbb{R}^3$

vector normal de $\mathcal{P}_2$ es $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como no existe un escalar λ tal que $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$, estos planos no son paralelos, y como $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 78 \neq 0$, tampoco son ortogonales. □

Teorema 21 [*Paralelismo y ortogonalidad de rectas y planos en* $\mathbb{R}^3$]. Sean $\mathcal{L}$ una recta con vector director $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}$ un plano con vector normal $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$.

1. La recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$, si y sólo si, el vector $\mathbf{d}$ es ortogonal al vector $\mathbf{n}$; es decir, $\mathcal{L} \parallel \mathcal{P}$, si y sólo si, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$ (Fig. 2.27-izquierda).

2. La recta $\mathcal{L}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, si y sólo si, el vector $\mathbf{d}$ es paralelo al vector $\mathbf{n}$; es decir, $\mathcal{L} \perp \mathcal{P}$, si y sólo si, $\mathbf{d}$ es múltiplo por escalar de $\mathbf{n}$ (Fig. 2.27-derecha).

Demostración:

1. Si la recta $\mathcal{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ son paralelos, por la Definición 20, Pág. 96, el vector $\mathbf{d}$ es combinación lineal de los vectores directores del plano $\mathcal{P}$; es decir, existen puntos $P, Q \in \mathcal{P}$ tales que $\mathbf{d} = \overline{PQ}$;

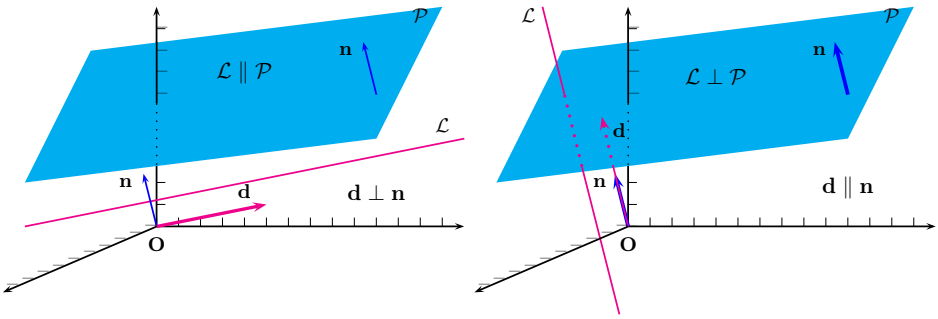


Figura 2.27: Paralelismo y ortogonalidad de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

finalmente, por la definición de hiperplano, $\mathbf{d}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$; es decir, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Observemos que la anterior argumentación está basada en definiciones, por lo tanto, es también válida en el sentido contrario.

2. Ejercicio para el lector (Ejercicio 97). □

Ejemplo 43. Determinemos si la recta $\mathcal{L}$ del Ejemplo 35, Pág. 99, es paralela u ortogonal al plano $\mathcal{P}$ del Ejemplo 37.

Por el Teorema 19, un vector normal de $\mathcal{P}$ es $\mathbf{n} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Como no existe un escalar λ tal que $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{n}$ ($\mathbf{d}$ es el vector director de la recta $\mathcal{L}$), la recta $\mathcal{L}$ no es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, y como $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 6 \neq 0$, la recta $\mathcal{L}$ tampoco es paralela al plano $\mathcal{P}$. □

2.9. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	Página	Conceptos	Página
Vector de R^n	46	Vector director de una recta	82
Componente de un vector	46	Ecuación vectorial de una recta	83
Vector cero o nulo	46	Ecuaciones paramétricas de una recta	83
Vectores canónicos de R^n	47	Rectas paralelas	86
Vector libre	48	Rectas iguales	88
Segmento dirigido	48	Rectas ortogonales	88
Segmentos dirigidos iguales	48	Ecuaciones simétricas de una recta	90
Suma de vectores de R^n	50	Plano	91
Producto por escalar en R^n	50	Vectores directores de una plano	91
Vectores paralelos en R^n	51	Ecuación vectorial de un plano	92
Combinación lineal en R^n	53	Ecuaciones paramétricas de un plano	93
Combinación lineal trivial	54	Planos paralelos	96, 113
Conjunto generador en R^n	55	Planos iguales	98
Producto $A\mathbf{x}$	58	Recta paralela a un plano	98
Espacio nulo de una matriz	60	Recta ortogonal a un plano	101
Espacio columna de una matriz	62	Hiperplano	103
Conjunto de vectores $l.d.$ en R^n	65	Vector normal de un hiperplano	103
Conjunto de vectores $l.i.$	65	Hiperplanos paralelos	104
Producto escalar en R^n	68	Hiperplanos ortogonales	104
Norma	71	Producto vectorial	105
Vector unitario	72	Area de un paralelogramo	110
Ángulo entre vectores de R^n	76	Volumen de un paralelepípedo	111
Ángulo agudo	77	Producto Mixto	111
Ángulo obtuso	77	Vectores coplanares	111
Ángulo recto	77	Ecuación normal del plano en R^3	112
Vectores ortogonales	78	Vector normal de un plano en R^3	112
Proyección ortogonal sobre un vector	79	Planos paralelos en R^3	113
Componente ortogonal	80	Planos ortogonales en R^3	113
Recta	82		

1. Haga una lista de por lo menos 3 variables ó cantidades tales que:
   a) se identifiquen como escalares.
   b) se identifiquen como vectores (coordenadas).
   c) se identifiquen como vectores libres.

   En los dos últimos casos, las variables pertenecen a $\mathbb{R}^n$ para algún valor de n. Indique el valor de n.

2. Represente geométricamente los vectores $\mathbf{c} = 2\mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$, $\mathbf{f} = 3\mathbf{b}+1{,}5\mathbf{a}$ y $\mathbf{g} = 3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ y diga cuáles son **paralelos**, cuando

$$\text{a) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Para los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ del Ejercicio 2, calcule

$$\text{a) } \tfrac{1}{2}\mathbf{a} - \tfrac{3}{2}\mathbf{a} \qquad \text{b) } \mathbf{b} - 3\mathbf{a} - \mathbf{b} \qquad \text{c) } \tfrac{3}{4}\mathbf{a} + \tfrac{3}{4}\mathbf{b}$$

¿Cuál(es) de ellos es(son) paralelo a $\mathbf{a}$? ¿Cuál(es) a $\mathbf{b}$?

4. Trace dos vectores libres arbitrarios $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y construya gráficamente los vectores $2\mathbf{u}$, $-\dfrac{2}{3}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+2\mathbf{v}$, $3\mathbf{u}-\mathbf{v}$. ¿Cuál(es) de ellos es(son) paralelo a $\mathbf{u}$? ¿Cuál(es) a $\mathbf{v}$?

5. En los torneos mixtos de fútbol, los equipos están conformados por 4 mujeres y 7 hombres, y en los de basketball, por 2 mujeres y 3 hombres, con la condición que cada equipo tenga un primíparo de cada sexo. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{b}$ los vectores que representan la composición por sexos de un equipo de fútbol y uno de basketball, respectivamente. Represente algebraica y geométricamente:
   a) La participación de los primíparos.
   b) La composición de los no primíparos en cada deporte.
   c) La reunión de 2 equipos de fútbol y 3 de basketball.

6. Un avión que vuela de Sur a Norte a una velocidad de 600 km/hora entra en una corriente de aire que va de Este a Oeste a una velocidad de 300 km/hora.
   a) Represente geométricamente estas dos cantidades y el *rumbo* final del avión.
   b) Gráficamente, ¿Cuál seria el *rumbo* final del avión, si:
      1) La misma corriente va de Oeste a Este?
      2) La velocidad del avión hubiese sido la tercera parte?
      3) El avión vuela hacia el Noreste?
      4) Las dos velocidades hubiesen sido el doble?

5) La velocidad del avión hubiese sido la mitad y la de la corriente el doble?

7. Determine un vector $\mathbf{x}$ que satisfaga la ecuación

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{x} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. ¿Cuáles de las propiedades, clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa, opuestos y cancelativa de la suma entre números reales tienen una propiedad similar en la suma de vectores?. ¿Cuáles de estas propiedades de la multiplicación entre números reales tienen una propiedad similar en el producto por escalar?

9. Complete la demostración del Teorema 1, Pág. 52.

10. Determine, para cada caso, los valores de a y b, si existen, que hacen válida la igualdad.

$$\text{a) } 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+3b \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11. Trace el vector $\overline{PQ}$ y calcule sus componentes.

a) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

12. Determine si el primer vector es combinación lineal de los otros.

a) $\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2b \\ a+5b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2a-2b \\ -a+6b \\ 5a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

13. Determine si el vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz dada.

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2b \\ a+5b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

14. Verifique que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Podemos afirmar que $\mathbb{R}^3$ es generado por estos vectores?

15. Encuentre un vector de $\mathbb{R}^4$ que no sea combinación lineal de $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Podemos afirmar que $\mathbb{R}^4$ es generado por estos vectores?

16. Determine para qué valores de λ, el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

17. Determine para qué valores de α,

$$Gen\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3.$$

18. Dados los vectores $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\12\\-24\end{pmatrix}$.
    a) Encuentre la combinación lineal $2\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{c}$.
    b) Encuentre otra combinación lineal de los vectores dados.
    c) ¿Cuántas combinaciones lineales de los vectores dados existen?
    d) Calcule los vectores $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ y diga si son combinación lineal de los vectores dados.
    e) ¿Es el vector cero combinación lineal de los vectores dados?
    f) ¿Es el vector $\mathbf{u}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\frac{2}{3}\mathbf{c}$ combinación lineal de los vectores dados?
    g) ¿Es el vector $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ combinación lineal de los vectores dados?
    h) ¿Qué problema se plantea para contestar la pregunta anterior? ¿Es necesario resolverlo?
    i) ¿El vector $\mathbf{a}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?
    j) ¿El vector $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?
    k) ¿El vector $\mathbf{u}$ dado en f) pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?
    l) ¿El vector $\mathbf{v}$ dado en g) pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?
    m) ¿El vector $\mathbf{0}$ pertenece a $Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$?

19. Para W, el conjunto generado del Ejemplo 10, Pág. 56, encuentre otros vectores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{r},\mathbf{s}$ tales que $W=Gen\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ y $W\neq Gen\{\mathbf{r},\mathbf{s}\}$. Diga si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: $W=Gen\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, para todo $\mathbf{a},\mathbf{b}\in W$.

20. Dado $V=Gen\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\mathbf{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$, demuestre que existe otro conjunto generador de V. [AYUDA: Ver observaciones al final de los Ejemplos 7, 8 y 10, Pág. 55].

21. Reescriba cada una de las preguntas del Ejercicio 18 usando el producto $A\mathbf{x}$, indicando, en cada caso, cuál es la matriz A y el vector $\mathbf{x}$. [AYUDA: El punto *a)* sería: Calcule $A\mathbf{x}$, para $A = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$].

22. Demuestre la segunda parte del Teorema 2, Pág. 59.

23. Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $H = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y diga por qué.

    a) El vector $\mathbf{v}$ está en H.

    b) El vector $\mathbf{w}$ está en H.

    c) El vector $\mathbf{v}$ está en *Gen* H.

    d) El vector $\mathbf{w}$ está en *Gen* H.

    e) El vector **2u-v** está en *Gen* H.

    f) El vector $\mathbf{u}+\mathbf{3w}$ está en *Gen* H.

24. Explique por qué, si el conjunto M contiene un vector no nulo, *Gen* M tiene infinitos vectores.

25. Dado un vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$?

26. Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$? (AYUDA: Considere dos posibilidades: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ paralelos y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no paralelos)

27. Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$, geométricamente, ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? ¿Qué es $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$? (AYUDA: Considere dos posibilidades: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ paralelos y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no paralelos)

28. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

29. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

30. Escriba un conjunto generador de $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$. ¿Existe otro conjunto generador con menos elementos?

31. Verifique que $Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = Gen\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$.

32. Demuestre que $Gen(A) = Gen(B)$, si y sólo si, para todo vector $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{a} \in Gen(B)$ y, para todo vector $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{b} \in Gen(A)$.

33. Dados los sistemas de ecuaciones lineales,

$$(i)\quad \begin{aligned} 2x - y + 3z - w &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 1 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x - 3z &= 1 \\ 3x + 2y &= -2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$(iii)\quad \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

   a) Exprese los sistemas en forma de ecuaciones vectoriales

   b) Exprese los sistemas como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, indicando, en cada caso, cuál es la matriz A y cuáles son los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$.

34. Demuestre el Teorema 3, Pág. 60 (AYUDA: Demuestre que cada uno de los puntos implica el siguiente y que el último implica el primero).

35. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **cualquier** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **tiene solución única**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

   a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.

   b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.

   c) Cada fila de U tiene un pivote.

   d) Cada columna de U tiene un pivote.

   e) La matriz U tiene n pivotes.

   f) La matriz U tiene m pivotes.

   g) $m = n$.

   h) El conjunto formado por las columnas de A genera a $\mathbb{R}^m$.

36. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **cualquier** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **tiene infinitas soluciones**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.
    a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
    b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.
    c) Cada fila de U tiene un pivote.
    d) Cada columna de U tiene un pivote.
    e) La matriz U tiene n pivotes.
    f) La matriz U tiene m pivotes.
    g) $m < n$.
    h) El conjunto formado por las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$

37. Sean A una matriz de m filas y n columnas y U una matriz escalonada equivalente a A. Si para **un** vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, **es inconsistente**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y responda a la pregunta formulada. Justifique su respuesta.
    a) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
    b) El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de U.
    c) Cada fila de U tiene un pivote.
    d) El vector $\mathbf{b}$ puede ser $\mathbf{0}$.
    e) El vector $\mathbf{b}$ puede ser un múltiplo de alguna de las columnas de A
    f) El vector $\mathbf{b}$ puede ser la suma de las columnas de A
    g) El conjunto formado por las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.
    h) ¿Qué puede decirse del número de pivotes de U?

38. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para que valor de n, el vector $\mathbf{z} = A\mathbf{b}$ pertenece a $\mathbb{R}^n$?

b) ¿El vector $\mathbf{a}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

c) ¿El vector cero de $\mathbb{R}^3$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

d) ¿El vector $\mathbf{v} = A\mathbf{b}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

e) ¿El vector $\mathbf{c}$ pertenece al espacio nulo de A? ¿Al espacio columna de A?

39. Demuestre que si los conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ y $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ son *l.i.*, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son combinación lineal de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, si y solo si, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Utilice este resultado para determinar si

$$Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}.$$

40. Dadas las siguientes matrices,

i) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Determine si las columnas forman un conjunto de vectores *l.i.*

b) Describa el problema que, según la teoría, se debe plantear para contestar la pregunta anterior.

c) ¿Es necesario resolver el problema anterior?

d) Describa la pregunta a) en términos del espacio nulo de las matrices.

41. Para las matrices del Ejercicio 40, calcule un conjunto generador para sus espacios columna (C_A) y un conjunto generador para sus espacios nulos (N_A).

42. Demuestre que un conjunto de vectores es *l.d.*, si sólo si, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los otros vectores del conjunto. (AYUDA: Observe que, de una combinación lineal

de los vectores del conjunto igual a cero, podemos despejar uno de los vectores en término de los demás y que, de la expresión de un vector como combinación lineal de los otros, obtenemos una combinación lineal no trivial de los vectores del conjunto igual a cero).

43. ¿Para qué valores de r y t los siguientes conjuntos de vectores son $l.i.$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} -r \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} t-r \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3r \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \\ 2r-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

44. Demuestre que las columnas pivotales de una matriz escalonada forman una conjunto de vectores $l.i.$ Verifique este resultado con un par de ejemplos.

45. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son $l.i.$? ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v}$)

a) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}\}$. b) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, 2\mathbf{u}\}$. c) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$. d) $\{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0\}$. e) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sabiendo que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

46. Complete la demostración del Teorema 6, Pág. 67.

47. Dados los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$, señale las expresiones que están bien definidas.

a) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$	b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$	c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$
d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$	e) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	f) $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot 2\mathbf{w}$
g) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^{-2}$	h) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$	

48. Dada la matriz A de orden $m \times n$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, demuestre que la componente i del vector $A\mathbf{x}$ es el producto escalar entre el vector formado por las componentes de la fila i de A y el vector $\mathbf{x}$. Verifíquelo con un par de ejemplos.

49. Supongamos que la evaluación definitiva de un curso de Álgebra Lineal se determina por el promedio de parciales con un peso del 60 % , el promedio de quices con un peso del 30 % y una nota conceptual con un peso del 10 %. Si las calificaciones del estudiante Martin Pérez son 4.0 en el promedio de parciales, 4.5

en el promedio de quices y 4.8 en la nota conceptual, calcule la nota definitiva de Martin Pérez, usando el producto escalar.

50. Demuestre el Teorema 8, Pág. 70.

51. Para los *cuadriláteros* cuyos vértices se dan, calcule la longitud de sus lados y sus diagonales. Con base en sus resultados, diga cuáles de ellos son *paralelogramos*.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

52. Para los *paralelogramos* cuyos lados se dan, calcule la longitud de sus lados y sus diagonales. Con base en sus resultados, diga cuáles de ellos son *rectángulos*. Cuáles son *cuadrados*? Cuales son *rombos*?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

53. Encuentre el ángulo que forman los siguientes vectores.

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

54. Determine si los siguientes vectores son ortogonales

a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

55. Complete la demostración del Teorema 12 (Pág. 74); es decir, demuestre que si $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$. [AYUDA: Suponga que los dos vectores son diferentes de cero y utilice la definición de ángulo entre dos vectores, Pág. 76, para reemplazar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Concluya que le ángulo entre los dos vectores es cero o π.]

56. Encuentre, si existen, dos vectores ortogonales a los vectores dados.

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

57. Complete la demostración del Teorema 13 (Pág. 75); es decir, demuestre que si $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \geq 0$ o al menos uno de los dos vectores es el vector $\mathbf{0}$. [AYUDA: Suponga que los dos vectores son diferentes de cero, tome cuadrados en la igualdad dada y utilice la definición de ángulo entre dos vectores, Pág. 76, para reemplazar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Concluya que el ángulo entre los dos vectores es cero.]

58. Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, ambos en $\mathbb{R}^n$, calcule el vector $\mathbf{p}$ paralelo a $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{v}-\mathbf{p}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{p}$ es llamado la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ ($\mathbf{p} = proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. [AYUDA: Suponga que $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{u}$ (¿Por qué?) y calcule λ de la ecuación $(\mathbf{v}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$ (¿Por qué?)]

59. Para los pares de vectores dados en los Ejercicios 54 y 56, calcule la proyección del primer vector sobre el segundo y viceversa (el segundo sobre el primero), y sus respectivas componentes ortogonales. Compare los respectivos resultados.

60. Dados los vectores

i) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

calcule (en el caso de vectores de $\mathbb{R}^2$, de ser posible, ilustre sus respuestas en una gráfica)

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \frac{7}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $0{,}36\mathbf{v} - 0{,}36\mathbf{u}$.

b) la norma de $\mathbf{u}$, $3\mathbf{u}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

c) el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $2\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ y $-3\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

d) un vector unitario en la dirección y sentido de $\mathbf{u}$. ¿Existe otro?

e) un vector paralelo a $\mathbf{v}$, con la mitad de su magnitud. ¿Existe otro?

f) un vector en la dirección de $\mathbf{w}$ y sentido contrario a él. ¿Existe otro?

g) un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$. ¿Existe otro?

h) un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Existe otro?.

i) un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ¿Existe otro?.

j) la proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$.

k) la proyección del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$. Compare su respuesta con la del item anterior.

l) la proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $2\mathbf{v}$. Compare su respuesta con la del item $60j$.

m) la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $2\mathbf{v}$.

n) el punto definido por un vector paralelo a $\mathbf{v}$ más cercano al punto $\mathbf{u}$. Compare su respuesta con la del item $60j$.

61. Demuestre que la proyección de $\mathbf{u}$, un vector de $\mathbb{R}^n$, sobre el vector canónico $\mathbf{e}_i$ es el vector $u_i\mathbf{e}_i$, donde u_i es la i-ésima componente del vector $\mathbf{u}$. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

62. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.
    a) Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, entonces $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ó $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
    b) Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, entonces $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.
    c) Si $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$.
    d) Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.
    e) Cualquier conjunto formado por un vector de $\mathbb{R}^n$ forma un conjunto *l.i.*
    f) Cualquier conjunto formado por un par de vectores diferentes de $\mathbb{R}^n$ es *l.i.*
    g) Cualquier conjunto formado por tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^3$ es *l.i.*
    h) Cualquier conjunto formado por tres vectores diferentes de $\mathbb{R}^2$ genera a $\mathbb{R}^2$.
    i) Cualquier conjunto *l.i.* formado por un par de vectores de $\mathbb{R}^2$ genera a $\mathbb{R}^2$.
    j) Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ es *l.i.*, entonces el conjunto de vectores $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ es *l.i.*
    k) Si A es una matriz $m\times n$, cuyas columnas forman un conjunto de vectores *l.i.*, entonces el sistema, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^m$.
    l) Si A es una matriz $n\times n$, cuyas columnas forman un conjunto de vectores *l.i.*, entonces el sistema, cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$, tiene solución única para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$.
    m) Si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal no nula de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

63. En la solución dada al Ejemplo 30, Pág. 90, ¿Cómo fueron obtenidos los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$? ¿Existen otros vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ que resuelvan los problemas planteados? Con estos otros vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, ¿Cambia la solución?

64. Dadas las siguientes ecuaciones, identifique las rectas, los planos y los hiperplanos

a) En $\mathbb{R}^2$, $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

b) En $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 2 + 5t \\ w = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) En $\mathbb{R}^5$, $\dfrac{x_1 - 3}{2} = \dfrac{x_2}{5} = x_3 = x_5 - 2, \quad x_4 = 0$

d) En $\mathbb{R}^4$, $3x - 2y = 5$

e) En $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) En $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x_1 = 2 - 3t \\ x_2 = -s \\ x_3 = 5 \\ x_4 = t + s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$

65. Encuentre dos puntos y dos vectores directores de cada recta $\mathcal{L}$ dada a continuación.

a) (en $\mathbb{R}^2$) $y = 3x - 2$.

b) (en $\mathbb{R}^3$) $\dfrac{x - 3}{2} = 1 + y = 2z$.

c) (en $\mathbb{R}^3$) $\dfrac{x}{2} = 1 - z, \quad y = 1$.

d) (en $\mathbb{R}^4$), $\dfrac{x + 5}{-3} = 1 + y = \dfrac{w}{2}, \quad z = 0$.

66. Encuentre una ecuación de una recta que contenga los puntos P y Q. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

67. Encuentre una ecuación de una recta que contenga el punto P y sea paralela al vector Q del Ejercicio 66. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

68. Encuentre una ecuación de una recta que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal a la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. En cada caso, ¿Cuántas rectas hay con estas condiciones?

69. Si definimos el ángulo entre dos rectas como el ángulo formado por sus vectores directores (el otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), encuentre el ángulo entre la recta del Ejercicio 65 y la respectiva recta hallada en el Ejercicio 66.

70. Encuentre dos puntos y dos vectores directores del plano $\mathcal{P}$ con ecuaciones paramétricas dadas a continuación.

a) $\begin{cases} x = 2t - s \\ y = s - 3 \\ z = t + s \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = -t - 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t - s \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = s - 3 \\ x_3 = -t - 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t + s \end{cases}$

71. Demuestre el Teorema 15, Pág. 98.

72. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 74 y sea paralelo al respectivo plano $\mathcal{P}$ del Ejercicio 70. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

73. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal a la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

74. Encuentre una ecuación de un plano que contenga los puntos P, Q y R. En cada caso, ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

a) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

75. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 36, Pág. 101.

76. Encuentre una ecuación de un plano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y contenga la respectiva recta $\mathcal{L}$ del Ejercicio 65. ¿Cuántos planos hay con estas condiciones?

77. Demuestre que tres vectores de $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto *l.d.*, si y sólo si, existe un plano que pasa por el origen y contiene a los tres vectores. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

78. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga los puntos $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

[AYUDA: llame $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ al vector normal y recuerde que $\mathbf{n}$ debe ser ortogonal a $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$]. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

79. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga, además

de los puntos P, Q y R del Ejercicio 78, el punto $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(AYUDA: llame $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ al vector normal y recuerde que $\mathbf{n}$ debe ser ortogonal a $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$). ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

80. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea paralelo al hiperplano $\mathcal{H}: \ 3x_1 - 2x_3 - 5 = -x_4$. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

81. Si definimos el ángulo entre una recta y un hiperplano como el complemento[24] del ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal al hiperplano (otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos ángulos entre la recta del Ejercicio 65 y el hiperplano dado en el Ejercicio 80.

82. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 39, Pág. 104.

83. Encuentre una ecuación de un hiperplano que contenga el punto P del Ejercicio 66 y sea ortogonal al hiperplano $\mathcal{H}: \ 2x_1 + x_3 - 3 = 4x_4 - x_2$. ¿Cuántos hiperplanos hay con estas condiciones?

84. Determine si la recta $\mathcal{L}: \ \dfrac{x+5}{-3} = 1 + z = \dfrac{w}{2}, \quad y = 0$ intercepta a cada uno de los siguientes planos

a) $\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2t - 4s \\ x_3 = -3t + 7s \\ x_4 = 4t - 6s \end{cases}$ b) $\mathcal{P}: \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = 5t - 6s \\ x_3 = -4t + 4s \\ x_4 = -4 \end{cases}$

En caso afirmativo, encuentre la intersección.

85. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 40, Pág. 105.

[24] Recordemos que el ángulo α es el complemento del ángulo β, y viceversa, si y sólo si, $\alpha + \beta = 90^o$.

86. Si definimos uno de los "ángulos" entre dos hiperplanos como el ángulo formado por sus vectores normales (otro "ángulo" es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos "ángulos" entre los hiperplanos dados en los Ejercicios 80 y 83.

87. Demuestre que un hiperplano, en $\mathbb{R}$, es un punto y que, en $\mathbb{R}^2$, es una recta. Verifique este resultado con un par de ejemplos.

88. Complete la demostración del Teorema 17, Pág. 106.

89. Sabiendo que el hiperplano $\mathcal{H} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \beta$ es paralelo a la recta $\mathcal{L} : \mathbf{x} = t\mathbf{d} + \mathbf{p},\ t \in \mathbb{R}$, si y sólo si, $\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{d}$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) y que es ortogonal a la recta $\mathcal{L} : \mathbf{x} = t\mathbf{d} + \mathbf{p},\ t \in \mathbb{R}$, si sólo si, $\mathbf{n}$ es paralelo a $\mathbf{d}$ ($\mathbf{n} = \alpha\mathbf{d}$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$), determine si las siguientes rectas son ortogonales o paralelas al hiperplano $\mathcal{H} : 2x_1 + x_3 - 5 = 4x_4$.

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = w + 3,\ z = 2$

b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \\ w = t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

90. Sabiendo que el hiperplano $\mathcal{H} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \gamma$ es paralelo al plano $\mathcal{P} : \mathbf{x} = t\mathbf{d}_1 + s\mathbf{d}_2 + \mathbf{p},\ s, t \in \mathbb{R}$, si y sólo si, $\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{d}_1$ y a $\mathbf{d}_2$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_1 = 0$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_2 = 0$) y que es ortogonal al plano $\mathcal{P} : \mathbf{x} = t\mathbf{d}_1 + s\mathbf{d}_2 + \mathbf{p},\ s, t \in \mathbb{R}$, si sólo si, $\mathbf{n}$ es una combinación lineal de $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ ($\mathbf{n} = \alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2$, para algún $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$), determine si los siguientes planos son ortogonales o paralelos al hiperplano $\mathcal{H} : x_1 + x_2 - 2 = x_4$.

a) $\begin{cases} x = 1 - t + 2s \\ y = 3s - 2t \\ z = 1 + t - s \\ w = 2 - t \\ s, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2s + 1 \\ z = 1 - t - s \\ w = t + 2s - 2 \\ s,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Para los Ejercicios 91 a 96, sean $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ las siguientes rectas y planos de $\mathbb{R}^3$ y P un punto de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x_1 = -3 - 2t \\ x_2 = 5t - 6s \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ x_3 = 1 - 4t + 4s \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 : \ \frac{x+5}{6} = \frac{z-1}{2} \quad y = -1$$

$$\mathcal{P}_2 : \ x - 4y + 3z - 7 = 0$$

$$\mathcal{L}_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

91. Encuentre

a) un punto de cada recta y cada plano.

b) un vector director de cada recta.

c) los otros dos tipos de ecuaciones de las rectas.

d) Un conjunto formado por dos vectores directores de cada plano.

e) un vector normal de cada plano.

f) los otros dos tipos de ecuaciones de los planos.

92. Si, en $\mathbb{R}^3$, definimos uno de los ángulos entre una recta y un plano como el valor absoluto del complemento[25] del ángulo formado por un vector director de la recta y un vector normal al plano (otro ángulo es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule dos ángulos entre la recta $\mathcal{L}_1$ y cada uno de los planos dados.

93. Si, en $\mathbb{R}^3$, definimos uno de los "ángulos" entre dos planos como el ángulo formado por sus vectores normales (el otro "ángulo" es el suplemento del ángulo así definido; es decir, 180^o (o π) menos el ángulo definido), calcule los "ángulos" entre cada par de los planos dados.

94. Determine

a) cuáles rectas son ortogonales y cuáles son paralelas.

b) cuáles planos son ortogonales y cuáles son paralelos.

c) cuál de las rectas es ortogonal al plano $\mathcal{P}_1$.

d) cuál de las rectas es paralela al plano $\mathcal{P}_2$.

e) cuál de las rectas corta al plano $\mathcal{P}_3$.

f) cuál de las rectas está contenida en el plano $\mathcal{P}_1$.

95. Encuentre, si es posible,

a) una recta paralela a la recta $\mathcal{L}_1$ que pase por el origen. ¿Existe otra?

b) una recta ortogonal a la recta $\mathcal{L}_2$ que corte a la recta $\mathcal{L}_3$. ¿Existe otra?

c) un plano que contenga la recta $\mathcal{L}_1$. ¿Existe otro?

d) un plano paralelo a la recta $\mathcal{L}_2$ que pase por el origen. ¿Existe otro?

e) un plano ortogonal a la recta $\mathcal{L}_3$ que contenga a una de las otras dos rectas. ¿Existe otro?

f) un plano paralelo al plano $\mathcal{P}_1$ que pase por P. Existe otro?

[25] Recordemos que el ángulo α es el complemento del ángulo β, y viceversa, si y sólo si, $\alpha + \beta = 90^o$.

g) un plano ortogonal al plano $\mathcal{P}_2$ que contenga a la recta $\mathcal{L}_1$. ¿Existe otro?

96. Calcule

a) la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}_1$ (AYUDA: Calcule la norma de la componente vectorial del vector $\overline{PQ}$ ortogonal a $\mathbf{v}$, siendo Q un punto de la recta y $\mathbf{v}$ un vector director de la recta).

b) la distancia de un punto P al plano $\mathcal{P}_1$ (AYUDA: Calcule la norma de la proyección ortogonal del vector $\overline{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$, siendo Q un punto del plano y $\mathbf{n}$ un vector normal del plano).

c) la distancia entre las recta $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ (AYUDA: Si las rectas son paralelas, calcule la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra [ver a)]. En caso contrario, calcule la norma de la proyección ortogonal del vector $\overline{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$, siendo P un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, Q un punto de la recta $\mathcal{L}_2$ y $\mathbf{n}$ un vector ortogonal a las dos rectas).

d) la distancia de la recta $\mathcal{L}_1$ al plano $\mathcal{P}_1$ (AYUDA: Si la recta es paralela al plano, calcule la distancia de un punto cualquiera de la recta $\mathcal{L}_1$ al plano [ver b)]. En caso contrario, la distancia es cero).

e) la distancia entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ (AYUDA: Si los planos son paralelos, calcule la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano [ver b)]. En caso contrario, la distancia es cero).

97. Demuestre la segunda parte del Teorema 21, Pág. 114.

98. Hallar, en $\mathbb{R}^3$, una fórmula general para calcular la distancia

a) entre un punto P a una recta $\mathcal{L}$

b) entre un punto P a un plano $\mathcal{P}$.

c) entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

d) entre una recta $\mathcal{L}$ y un plano $\mathcal{P}$.

e) entre dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Para los Ejercicios 99 y 100, sean

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\ ,\ Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\ R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

puntos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u} = \overline{OP}$, $\mathbf{v} = \overline{OQ}$ y $\mathbf{w} = \overline{OR}$.

99. Determine cuáles de las siguientes expresiones están bien definidas y, en caso positivo, haga los cálculos indicados.

a) $(2\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$. b) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{v}) \cdot (-3\mathbf{w})$. c) $(\mathbf{u} \cdot 5\mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

d) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{u}) \cdot (-3\mathbf{w})$. e) $-3(\mathbf{v} \times 2\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$. f) $(\mathbf{u} \times 2\mathbf{v}) \cdot (-3\mathbf{u})$.

100. Calcule

a) el área de un paralelogramo en que P, Q y R son tres de sus vértices. ¿Cuántos paralelogramos con estas condiciones existen? ¿Cuáles son sus áreas?

b) el volumen de un paralelepípedo en que 0, P, Q y R son cuatro de sus vértices. ¿Cuántos paralelepípedos con estas condiciones existen? ¿Cuáles son sus volúmenes?

c) el volumen del paralelepípedo cuyos lados no paralelos son los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ¿Son coplanares estos vectores?

101. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales siguientes, identifique geométricamente el conjunto solución como "vacío", un punto, una recta, un plano, un hiperplano o ninguno de ellos.

a) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 6 del Capítulo 1.

b) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 7 del Capítulo 1.

c) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 8 del Capítulo 1.

d) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 10 del Capítulo 1.

e) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 11 del Capítulo 1.

f) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 13 del Capítulo 1.

g) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 14 del Capítulo 1.

h) Sistema de ecuaciones del Ejercicio 21 del Capítulo 1.

i) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 23 del Capítulo 1.

j) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 24 del Capítulo 1.

k) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 30 del Capítulo 1.

l) Sistemas de ecuaciones del Ejercicio 31 del Capítulo 1.

Capítulo 3

MATRICES

3.1. Introducción

En los capítulos anteriores, utilizando la noción de matriz, simplificamos la representación de problemas como los sistemas de ecuaciones lineales y de conceptos como el de combinación lineal. De paso, esta representación también nos simplificó el análisis y la solución de problemas que involucran un sistema de ecuaciones lineales como la determinación de independencia lineal de un conjunto de vectores y la decisión de si un vector es o no combinación lineal de un conjunto de vectores dado, tomando como herramienta de cálculo la aplicación del Algoritmo de Eliminación de Gauss[1] sobre una representación matricial de los sistemas de ecuaciones lineales. Sin restarle importancia a todo lo anterior, debemos decir que las matrices son importantes en si mismas y el estudio detallado de sus propiedades algebraicas enriquece su aplicación tanto en la matemática misma como en las demás ciencias y profesiones del mundo actual.

En este capítulo, retomaremos la definición dada de matriz para estudiar las operaciones algebraicas entre ellas (suma, producto por escalar, producto, transpuesta y determinantes), sus propiedades básicas y los principales tipos de matrices que resultan de las aplicaciones más comunes de este objeto matemático. Como una aplicación inmediata de la teoría de matrices, presentaremos una formulación matricial

[1]Recordemos que el Algoritmo de Eliminación de Gauss presentado en el Capítulo 1 calcula una matriz escalonada equivalente a una matriz dada.

del algoritmo de eliminación de Gauss y su estrecha relación con la factorización LU de una matriz, la cual es la base del desarrollo de los algoritmos computacionales modernos para resolver eficientemente un sistema de ecuaciones lineales y que son objeto de estudio en cursos como Análisis Numérico o Álgebra Lineal Numérica.

3.2. Definición y tipo de matrices

Definición 1 [*Matriz*]. Una *matriz* es un arreglo rectangular de números reales[2], llamados *componentes* o *elementos* de la matriz, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La *i-ésima fila* y la *j-ésima columna* de la matriz A son

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

respectivamente. El *orden o tamaño de la matriz* lo determinamos por el número de filas seguido del número de columnas. Así, decimos que el tamaño de una matriz es $m \times n$, si tiene m filas y n columnas; por simplicidad, cuando $m = n$, decimos que la matriz es de orden n . La componente a_{ij} ((i, j)-ésima componente) se encuentra en la fila i y columna j de la matriz A. También podemos denotar la matriz A como $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$, donde cada $\mathbf{a}_i$ (columna i de la matriz A) es un vector de $\mathbb{R}^m$ ó como (a_{ij}), donde cada a_{ij} (componente (i, j) de la matriz A) es un número real.

Ejemplo 1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & \sqrt{2} & -3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

[2]Aunque los números podrían ser complejos (matrices complejas), en este texto nos limitamos a las matrices de componentes reales (matrices reales)

$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $E = (e_{ij})$, $e_{ij} = (-1)^{i+j}$, $i, j = 1, 2, \ldots n$.

La matriz A es de orden 3×3, B es una matriz 2×4, C es una matriz 5×1 (en general, un vector de $\mathbb{R}^m$ es una matriz $m \times 1$), D es una matriz 1×3 (algunos autores llaman *vector fila* de $\mathbb{R}^n$ a las matrices $1 \times n$ [16]) y E es una matriz $n \times n$ o, simplemente, de orden n. □

La *diagonal de una matriz* está formada por las componentes a_{ij} , con $i = j$; es decir, por las componentes a_{ii}. Así, podemos ver que en el Ejemplo 1, las diagonales de las matrices A, B, C y D son $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Cuando las componentes arriba de la diagonal son ceros ($a_{ij} = 0$ para $i < j$), tenemos una *matriz triangular inferior*; si las componentes abajo de la diagonal son ceros ($a_{ij} = 0$ para $i > j$), tenemos una *matriz triangular superior*. Ahora, si el número de filas de una matriz coincide con el número de columnas ($m = n$), tenemos una *matriz cuadrada*. Si en una matriz cuadrada, tanto los elementos arriba de la diagonal, como los elementos abajo de la diagonal son ceros ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$), tenemos una *matriz diagonal* y si una matriz diagonal tiene todos los elementos de la diagonal iguales ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $a_{ii} = \alpha$), tenemos una *matriz escalar*. La matriz escalar más importante es la que tiene todos los elementos de la diagonal iguales a uno ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $a_{ii} = 1$). Por las propiedades que demostraremos más adelante en el *producto de matrices*, a esta matriz la llamamos *matriz identidad o idéntica* y la denotamos como I ó I_n cuando queramos explicitar que su orden es n. Observemos que

$$I_n = [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n],$$

donde los $\mathbf{e}_i$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ definidos en el Ejemplo 2 del Capítulo 2, Pág. 47.

Ejemplo 2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, A, C, D e I son matrices triangulares inferiores; B, C, D e I son matrices triangulares superiores; C, D e I son matrices diagonales; D e I son matrices escalares; e I es la matriz idéntica de orden 3 o I_3. □

Otra matriz importante (por sus propiedades respecto de las operaciones que definiremos más adelante) es la *matriz cero o matriz nula*, la cual tiene todas sus componentes iguales a cero y la denotamos como O ó $O_{m\times n}$ cuando queramos explicitar que su orden es $m \times n$.

De otro lado, al igual que para vectores, diremos que dos matrices son *iguales*, cuando todas sus componentes respectivas son iguales, para lo cual se requiere que sus tamaños también sean iguales.

Ejemplo 3. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para que las matrices A y B sean iguales, se debe tener $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, $d = 0$, $e = -2$ y $f = 5$.

□

Ejemplo 4. Consideremos las matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices son diferentes, ya que sus tamaños son diferentes.

□

3.3. Suma y producto por escalar de matrices

Al igual que con los escalares y los vectores, dadas unas matrices, es deseable obtener otras a partir de ellas y para esto, podemos generalizar las definiciones de la suma de vectores a la suma de matrices y del producto por escalar de vectores al producto por escalar de matrices.

Definición 2 [*Suma de matrices*]. Definimos la *suma entre dos matrices* de igual tamaño A y B, como la matriz $A+B$, cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de las matrices A y B. En otras palabras, dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

se define la suma de A y B como

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definición 3 [*Producto por escalar de matrices*]. Definimos el producto de una matriz A por un número real λ (escalar), como la matriz λA, cuyas componentes son el producto de λ por las componentes respectivas de A. En otras palabras, dado el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

definimos el producto de A por el escalar λ como

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -2A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

El producto por escalar $(-1)A$, lo denotamos simplemente como $-A$ y así, la resta $A-B$, la obtenemos de $A+(-1)B$.

Al igual que para vectores, la suma y el producto por escalar de matrices tienen propiedades muy similares a las que poseen los números reales. Veamos cuáles son las propiedades que se satisfacen para estas dos operaciones entre matrices.

Teorema 1 [*Propiedades algebraicas de la suma y el producto por escalar de matrices*].
Sean A, B y C matrices de tamaño $m \times n$ y sean α y β dos números reales. Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1. $A+B$ es también una matriz $m \times n$. *Ley clausurativa para la suma*
2. $A+B=B+A$. *Ley conmutativa para la suma*
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$. *Ley asociativa para la suma*
4. Existe una única matriz Z de tamaño $m \times n$ tal que $A+Z=Z+A=A \ \ (Z=O)$. *Ley modulativa para la suma*
5. Para cada matriz A, existe una única matriz P de tamaño $m \times n$ tal que $A+P=P+A=O \ \ (P=-A)$. *Existencia del opuesto para la suma*
6. λA es también una matriz $m \times n$. *Ley clausurativa para el producto por escalar*
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. *Ley distributiva del producto por escalar respecto a la suma de matrices*
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$. *Ley distributiva del producto por escalar respecto a la suma de escalares*

9. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$. *Ley asociativa respecto al producto por escalar*
10. $1A = A$. *Ley modulativa para el producto por escalar*
11. $0A = O$.
12. $\alpha O = O$.
13. $\alpha A = O$, si y sólo si, $\alpha = 0$ ó $A = O$.

La demostración de estas propiedades es muy similar a la de las propiedades de estas operaciones entre vectores (Teorema 1 del Capítulo 2, Pág. 52) y la dejamos como ejercicios para el lector (Ejercicio 4). □

Estas propiedades nos permiten resolver ecuaciones sencillas entre matrices, simplificar expresiones matriciales y proporcionan diferentes formas para hacer un mismo cálculo, lo cual permite elegir la forma más eficiente de realizarlo[3].

Ejemplo 6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determine la matriz X tal que

$$3X - 2A + B = 4B.$$

Sumando el opuesto de las matrices $-2A$ y B en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3X - 2A + B + 2A - B &= 4B + 2A - B && \\ 3X + 2A - 2A + B - B &= 4B - B + 2A && \text{Propiedad. 2, Teorema. 1.} \\ 3X + (2A - 2A) + (B - B) &= (4B - B) + 2A && \text{Propiedad. 3, Teorema 1.} \\ 3X + O + O &= 3B + 2A && \text{Propiedad 5, Teorema 1.} \\ 3X &= 3B + 2A && \text{Propiedad 4, Teorema 1.} \end{aligned}$$

[3]Por ejemplo, observemos que $cA + cB = c(A + B)$, pero la segunda expresión $(c(A + B))$ requiere menos multiplicaciones que la primera, por lo tanto, es más eficiente para realizar este cálculo.

Multiplicando por el escalar $\frac{1}{3}$ ambos lados de la última ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(3X) &= \frac{1}{3}(3B+2A) \\ \left(\frac{1}{3}3\right)X &= \frac{1}{3}(3B)+\frac{1}{3}(2A) \\ X &= B+\frac{2}{3}A. \end{aligned}$$

Así que

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

3.4. Producto de matrices

Otra operación que uno espera que se pueda definir entre matrices es la multiplicación o producto. Sin embargo, la definición no es la que uno se imagina. La definición que daremos tiene significado en la aplicación de la teoría de matrices a problemas reales y está relacionada con el producto $A\mathbf{x}$ definido en el capítulo anterior (Pág. 58).

Definición 4 [*Producto de matrices*]. Dadas las matrices A, de tamaño $m \times n$, y B, de tamaño $n \times k$, se define el producto de A por B, como la matriz AB, cuyas columnas son $A\mathbf{b}_1,\ A\mathbf{b}_2,\ \cdots, A\mathbf{b}_k$, donde $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \cdots, \mathbf{b}_k$ son las columnas de B; en otras palabras, se define AB, el producto de A por $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_k]$, como la matriz de orden $m \times k$ dada por

$$AB = [A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots\ A\mathbf{b}_k].$$

Para enfatizar el orden de los factores en el producto AB, decimos que A *pre-multiplica* a B o que B *post-multiplica* a A. Para una matriz A cuadrada, al producto AA, lo denotaremos A^2 y, en general, a $\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ veces}}$ por A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calculemos AB o pre-multipliquemos a B por A.

Usando la Definición 7 del Capítulo 2, (Pág. 58), tenemos

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así que,

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -6 & 9 \\ 22 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Observemos que el producto de matrices sólo es posible si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. De otro lado, no es difícil ver que la $(i, j)-$ésima componente de AB es la i-ésima componente del vector $A\mathbf{b}_j$, la cual es el resultado del producto escalar de los vectores formados por las componentes de i-ésima fila de A y $\mathbf{b}_j$, la j-ésima columna de B. En efecto, volvamos sobre el ejemplo anterior y verifiquemos que la componente $(3, 1)$ del producto AB efectivamente es el producto escalar de la tercera fila de la matriz A y la primera columna de la matriz B.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 3 \\ \mathbf{4} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -6 & 9 \\ \mathbf{22} & 2 \end{pmatrix}.$$

Resumamos la observación anterior en el siguiente teorema. La demostración queda como ejercicio para el lector (Ejercicio 5), no sin antes anotar que otros autores utilizan este resultado como definición del producto de matrices [7].

Teorema 2 [*Componentes del producto de matrices*].
Dadas las matrices $A = (a_{ij})$, de tamaño $m \times n$, y $B = (b_{jk})$, de tamaño $n \times p$, si $C = (c_{ik}) = AB$, entonces

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_k \ ,$$

donde $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{b}_k$ son los vectores de $\mathbb{R}^n$ formados por los elementos de la fila i de A y por los elementos de la columna j de B, respectivamente, para $i = 1,\ 2,\ \ldots\ m$ y $k = 1,\ 2,\ \ldots\ p$.

Antes de presentar las propiedades algebraicas del producto de matrices, veamos el significado de las operaciones entre matrices presentadas hasta ahora con una situación real en miniatura.

Ejemplo 8. Sean J y N las matrices que resumen la información de las ventas realizadas por Juliana y Nathalie, respectivamente, durante 1 mes (4 semanas).

	Juliana (J)				**Nathalie (N)**			
	Semana				**Semana**			
Producto	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
a	17	3	10	0	40	13	17	23
b	4	5	8	2	8	2	5	0
c	25	15	30	10	3	5	0	6

Sea C la matriz que resume las comisiones (en efectivo y en especie) por artículo vendido durante cada una de las 4 semanas del mes.

	Comisión por artículo vendido	
Semana	**En efectivo**	**En especie**
	(Miles de $)	(No. de Unidades)
1	12,50	2
2	20,00	3
3	27,50	1
4	9,50	5.

1. El total de las ventas realizadas por las dos vendedoras estará

dado por

$$J + N = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 10 & 0 \\ 4 & 5 & \mathbf{8} & 2 \\ 25 & 15 & 30 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 13 & 17 & 23 \\ 8 & 2 & \mathbf{5} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & 16 & 27 & 23 \\ 12 & 7 & \mathbf{13} & 2 \\ 28 & 20 & 30 & 16 \end{pmatrix},$$

por ejemplo, entre las dos, vendieron $13 = 8 + 5$ artículos del Producto **b** durante la Semana 3.

2. Si Juliana repite su esquema de ventas durante 6 meses, el total de ventas de Juliana para este período está dado por

$$6J = 6 \begin{pmatrix} 17 & \mathbf{3} & 10 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \\ 25 & 15 & 30 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & \mathbf{18} & 60 & 0 \\ 24 & 30 & 48 & 12 \\ 150 & 90 & 180 & 60 \end{pmatrix},$$

por ejemplo, en las condiciones dadas, Juliana venderá un total de $18 = 6 \times 3$ artículos del Producto **a** durante las segundas semanas de estos 6 meses.

3. La distribución, por tipo de producto, de la comisión devengada por Nathalie durante 1 mes estará dada por

$$NC = \begin{pmatrix} 40 & 13 & 17 & 23 \\ 8 & 2 & 5 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{12{,}50} & 2 \\ \mathbf{20{,}00} & 3 \\ \mathbf{27{,}50} & 1 \\ \mathbf{9{,}50} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.446{,}00 & 251 \\ 277{,}50 & 27 \\ \mathbf{194{,}50} & 51 \end{pmatrix},$$

por ejemplo, Nathalie obtuvo una comisión, en efectivo, de

$$\$194{,}500 = 3 \times \$12{,}50 + 5 \times \$20{,}00 + 0 \times \$27{,}50 + 6 \times \$9{,}50$$

por lo vendido del Producto **c** durante el mes en cuestión. □

En el siguiente teorema, se encuentra un resumen de las propiedades algebraicas del producto entre matrices.

Teorema 3 [*Propiedades algebraicas del producto de matrices*]. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, α un número real cualquiera y B y C matrices tales que los productos indicados se pueden efectuar. Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1. $(AB)C = A(BC)$. *Ley asociativa para el producto*
2. $A(B+C) = AB + AC$. *Ley distributiva del producto de matrices a izquierda respecto de la suma de matrices*
3. $(A+B)C = AC + BC$. *Ley distributiva del producto de matrices a derecha respecto de la suma de matrices*
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
5. Existe una única matriz P de orden m y una única matriz Q de orden n tales que, para toda matriz A, $PA = AQ = A$ ($P = I_m$ y $Q = I_n$). *Ley modulativa del producto*
6. $O_{km}A = O_{kn}$ y $AO_{nk} = O_{mk}$.

Demostración: Probemos las Propiedades 1 y 4. Dejamos las demás como ejercicio para el lector (Ejercicio 14). Supongamos que

$$C = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_p], \quad B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_k] \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ki} \end{pmatrix}.$$

1. Observemos que

$$\begin{aligned} (AB)\mathbf{c}_i &= [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_k]\ \mathbf{c}_i \\ &= c_{1i}(A\mathbf{b}_1) + c_{2i}(A\mathbf{b}_2) + \cdots + c_{ki}(A\mathbf{b}_k) \\ &= A(c_{1i}\mathbf{b}_1) + A(c_{2i}\mathbf{b}_2) + \cdots + A(c_{ki}\mathbf{b}_k) \\ &= A(c_{1i}\mathbf{b}_1 + c_{2i}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{ki}\mathbf{b}_k) \\ &= A(B\mathbf{c}_i). \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}(AB)C &= [(AB)\mathbf{c}_1 \quad (AB)\mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad (AB)\mathbf{c}_p] \\ &= [A(B\mathbf{c}_1) \quad A(B\mathbf{c}_2) \quad \cdots \quad A(B\mathbf{c}_p)] \\ &= A[B\mathbf{c}_1 \quad B\mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad B\mathbf{c}_p] \\ &= A(BC).\end{aligned}$$

4. Ahora,

$$\begin{aligned}\alpha(AB) &= \alpha[A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_k] \\ &= [\alpha(A\mathbf{b}_1) \quad \alpha(A\mathbf{b}_2) \quad \cdots \quad \alpha(A\mathbf{b}_k)] \\ &= [(\alpha A)\mathbf{b}_1 \quad (\alpha A)\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad (\alpha A)\mathbf{b}_k] \\ &= (\alpha A)\ [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_k] \\ &= (\alpha A)B.\end{aligned}$$

y de manera similar, podemos ver que $\alpha(AB) = A(\alpha B)$ □

Estas propiedades permiten simplificar cálculos. Dos casos fundamentales son los siguientes.

1. ***El cálculo de*** A^n. Por ejemplo, para calcular A^8, tendríamos que efectuar 7 productos de matrices:

$$A^8 = ((((((AA)A)A)A)A)A)A$$

lo que, utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, lo podemos reducir a 3 productos

$$A^2 = AA \quad , \quad A^4 = A^2A^2 \quad \text{y} \quad A^8 = A^4A^4,$$

al asociar el producto de las matrices de la siguiente manera

$$A^8 = [(AA)(AA)][(AA)(AA)].$$

2. ***El cálculo de*** $A^n\mathbf{x}$. Por ejemplo, para calcular

$$A^4\mathbf{x} = (AAAA)\mathbf{x} = [(AA)(AA)]\mathbf{x},$$

es más eficiente calcular

$$A(A(A(A\mathbf{x})));$$

ya que se requieren menos operaciones al multiplicar una matriz por un vector, que al multiplicar dos matrices.

La propiedad asociativa del producto nos permite formular las siguientes propiedades, las cuales son útiles en la simplificación de cálculos, como lo vimos en el primero de los anteriores casos fundamentales.

Teorema 4 [*Propiedades algebraicas de la potenciación de matrices*]. Sean A y B matrices de orden $n \times n$, y $r,\ s$ números enteros no negativos, entonces

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.
3. $(AB)^r = A^r B^r$, cuando A y B conmutan ($AB = BA$).

Demostración: La dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 16).

□

Es importante que observemos que la propiedad conmutativa de la multiplicación no siempre se tiene. Al respecto, tengamos en cuenta lo siguiente.

1. El producto AB puede estar definido, mientras que BA no. Por ejemplo, si el tamaño de A es $m \times n$ y el de B es $n \times p$ con $m \neq p$.
2. Los dos productos pueden estar bien definidos, pero AB tener un tamaño y BA otro. Por ejemplo, si el tamaño de A es $m \times n$ y el de B es $n \times m$ con $m \neq n$, el tamaño de AB es $m \times m$ y el de la matriz BA es $n \times n$.
3. Si A y B son matrices cuadradas de igual tamaño, tenemos que AB y BA están bien definidas y son de igual tamaño, pero en general $AB \neq BA$.

Ejemplo 9. Observemos el producto de las siguientes matrices, en diferente orden.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

4. Finalmente, cuando $AB = BA$, decimos que las *matrices A y B conmutan.*

Igualmente hay otras propiedades del producto que tenemos en los números reales, que entre matrices no tenemos. Esto se debe fundamentalmente a la ausencia frecuente de lo que en los números reales sería el inverso multiplicativo. Veamos algunas de ellas:

1. $AB = O$ no implica que A o B sean la matriz O, como vimos en la primera parte del ejemplo anterior.
2. $CA = CB$ (ó $AC = BC$) no implica que $A = B$.

Ejemplo 10. Observemos que el producto de los siguientes pares de matrices tienen el mismo resultado, y aunque una de ellas se presenta en cada par, las otras dos matrices no son iguales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

3. $A^2 = I$ no implica que $A = \pm I$.

Ejemplo 11. Observemos que el producto de la siguiente matriz por si misma da la matriz idéntica; sin embargo, la matriz no es la idéntica ni el opuesto de la idéntica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

3.5. Matrices invertibles

Volviendo sobre el comentario de la ausencia de inverso multiplicativo, podemos ver que no para todas las matrices A existe otra matriz B tal que $AB = I$.

Ejemplo 12. Veamos que si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, no existe una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $AB = I$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

A las matrices que tienen inverso multiplicativo, les llamamos de manera especial.

Definición 5 [*Matriz invertible*][4]. Se dice que la matriz A de tamaño $n \times n$ es *invertible*, si y sólo si, existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I.$$

A esta matriz B, la llamamos *inversa* de A.

Con esta definición, entre otras, surge la pregunta sobre la unicidad de la inversa. Para contestarla, supongamos que existen dos matrices inversas de A. Sean B y C matrices inversas de A. Así que

$$AB = BA = I \quad \text{y} \quad AC = CA = I$$

De modo que, si multiplicamos ambos lados de la igualdad $AB = I$ por la matriz C y usamos las propiedades del producto de matrices, tenemos

$$\begin{aligned} C(AB) &= CI \\ (CA)B &= C \\ IB &= C \\ B &= C. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5 [*Unicidad de la inversa*].
Si A es una matriz invertible, su inversa es única.

Con este resultado, cuando la matriz A es invertible, podemos hablar de ***la*** inversa de A y la denotamos por A^{-1}.

Ejemplo 13. Verifiquemos que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[4]Otro nombre que comúnmente reciben las matrices invertibles es el de *matrices no singulares.*[7]

es la matriz inversa de

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por multiplicación directa, podemos ver que

$$AB = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la misma forma, podemos verificar que $BA = I_3$, por lo tanto, B es la matriz inversa de A; es decir,

$$B = A^{-1}.$$

□

Otra pregunta interesante es ¿Cómo determinar que una matriz es invertible? (¿Es necesario encontrar explícitamente la inversa?). Aunque la definición sugiere que debemos calcular la inversa, veamos que es posible determinar si una matriz es invertible sin calcular su inversa. Sabemos que si una matriz A, de tamaño $n \times n$, es invertible, su inversa, A^{-1}, también tiene tamaño $n \times n$.

Así que debemos verificar si existe una matriz $B = [\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \cdots\, \mathbf{b}_n]$, tal que

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, tenemos que determinar si los sistemas de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1,\ A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$$

tienen solución. Para esto, podemos escalonar las matrices

$$[A \mid \mathbf{e}_1]\ ,\ [A \mid \mathbf{e}_2]\ ,\cdots,\ [A \mid \mathbf{e}_n]\,,$$

y determinar la consistencia de los sistemas de ecuaciones lineales asociados, lo que se garantiza si una matriz escalonada equivalente a A tiene n pivotes (ver Conclusión 2 al final de la Sección 1.4, Pág.

20). Por lo tanto, para determinar si A es una matriz invertible, no es necesario resolver los anteriores sistemas de ecuaciones lineales. De ser necesario el cálculo de A^{-1}, podríamos resolver simultáneamente los anteriores sistemas mediante el Algoritmo *Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás*[5] aplicado a la matriz aumentada conjunta $[A \mid \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n] = [A \mid I]$, como vimos al final del Capítulo 1, Pág. 30.

Es importante que notemos que, de acuerdo a la definición de matriz invertible (Definición 5, Pág. 154), para concluir que la matriz B calculada en el proceso anterior es la inversa de A, falta demostrar que $BA = I$, lo cual es siempre cierto. En efecto, en las secciones que siguen, presentamos algunas propiedades de las matrices invertibles e introducimos conceptos como el de matrices elementales para demostrar que dada una matrix A de orden $n \times n$, si existe una matriz B tal que $AB = I$, entonces $BA = I$ (Ejercicio 35).

Ejemplo 14. Determinemos si $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}25 & 0 \\ 0{,}50 & 0 & -0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ es invertible.

Aplicando sucesivamente las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \to F_2$, $F_3 - 3F_1 \to F_3$ y $F_3 - 2F_2 \to F_3$ a la matriz A (Eliminación de Gauss), obtenemos la matriz escalonada equivalente

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}50 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}50 \end{pmatrix}.$$

Como cada fila tiene pivote, los sistemas $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$ y $A\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$ tienen solución; es decir, la matriz inversa de A existe, por lo tanto A es una matriz invertible.

□

Ejemplo 15. Encontremos la inversa de la matriz A del ejemplo anterior.

Como observamos antes, para calcular A^{-1}, debemos resolver simultáneamente los sistemas de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \text{y} \quad A\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3,$$

[5]El Algoritmo de Gauss-Jordan que, en programación no paralela, es menos eficiente y en general requiere más operaciones, también podría usarse para resolver simultáneamente estos sistemas.

donde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Para ello, apliquemos el Algoritmo 4 (*Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás*, Pág. 25), separando sus dos etapas. Primero, aplicando sucesivamente las mismas operaciones elementales que en el ejemplo anterior a la matriz aumentada conjunta $[A \mid I_3]$ (Eliminación de Gauss), obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}25 & -0{,}25 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}50 & -0{,}25 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Segundo, apliquemos sucesivamente las operaciones elementales $2F_3 \to F_3$, $F_2 + 0{,}25F_3 \to F_2$, $2F_2 \to F_2$, $F_1 + 0{,}25F_2 \to F_1$ y $4F_1 \to F_1$ a la matriz anterior (Sustitución hacia atrás), para obtener

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Como vimos al final del Capítulo 1, cada una de las tres columnas de la derecha en la matriz anterior es la solución de cada uno de los tres sistemas de ecuaciones lineales planteados, respectivamente; por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Nuevamente, notemos que si se quiere calcular la inversa de una matriz A, generalmente, es necesario resolver los sistemas $[A \mid \mathbf{e}_1]$, $[A \mid \mathbf{e}_2], \cdots, [A \mid \mathbf{e}_n]$; y que para determinar si una matriz es invertible, no es necesario calcular su inversa, puesto que es suficiente con saber que su inversa existe, para lo cual sólo se requiere escalonar la matriz y verificar que una matriz escalonada equivalente tiene n pivotes.

Por suerte, lo que generalmente necesitamos es saber si una matriz es invertible y no saber cuál es su inversa. Incluso, si necesitamos calcular el vector $A^{-1}\mathbf{b}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{b}$ dados, es más fácil resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, que calcular la matriz inversa de A y luego multiplicar el resultado por el vector $\mathbf{b}$.

Veamos algunas de las propiedades de las matrices invertibles y sus inversas, las cuales son muy importantes tanto en el desarrollo teórico como en la simplificación de expresiones matriciales para realizar cálculos.

Teorema 6 [*Propiedades algebraicas de la inversa de una matriz*]. Sean A y B matrices invertibles de tamaño $n \times n$, λ un escalar diferente de cero y m un número natural, entonces

1. A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA también es invertible y $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.
3. AB también es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$(notemos el orden en el producto de las inversas).
4. A^m también es invertible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m \equiv A^{-m}$.

Demostración:
En la demostración de cada uno de los puntos de este teorema, debemos mostrar que existe una matriz que satisface las dos igualdades de la Definición 5. Para cada caso, demostramos una de ellas y dejamos la otra igualdad como ejercicio para el lector (Ejercicio 18).

1. Para demostrar que A^{-1} es invertible, es suficiente con mostrar que existe una matriz C tal que $A^{-1}C = I$. Pero es claro que si tomamos $C = A$, tenemos $A^{-1}A = I$. Así que A^{-1} es invertible y su inversa (que es única) es A. En otras palabras, $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Veamos que si $C = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, entonces, por el Teorema 3, Pág. 150

$$C(\lambda A) = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)(A^{-1}A) = I.$$

   Así que λA es invertible y $(\lambda A)^{-1} = C = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3. De manera similar, vemos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

   Así que AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Igualmente, como A y A^{-1} conmutan, por el Resultado 3 del Teorema 4, Pág. 152

$$A^m(A^{-1})^m = (AA^{-1})^m = I^m = I$$

   Así que A^m también es invertible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$. □

Esta última propiedad le da sentido a los potencias enteras negativas de matrices y, si además, definimos $A^0 = I$, tenemos definidas las potencias enteras de una matriz, lo cual satisface las propiedades enunciadas en el Teorema 4 y que dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 19)

Ahora estamos en capacidad de demostrar uno de los resultados más importantes del Álgebra Lineal relacionado con la caracterización de las matrices invertibles en término de la solución de sistemas de ecuaciones lineales y la independencia lineal de vectores.

Teorema 7 [*Equivalencia de la invertibilidad*].
Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) La matriz A es invertible.

b) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única.

c) La única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

d) Las columnas de la matriz A son linealmente independientes (*l.i.*).

e) Toda matriz escalonada equivalente a A tiene n pivotes.

Demostración:
Para demostrar estas equivalencias, demostremos las siguientes implicaciones

$$a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d) \Longrightarrow e) \Longrightarrow a)$$

[$a) \Longrightarrow b)$] Supongamos que A es una matriz invertible. Veamos primero que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y luego, que esta solución es la única. Para esto, verifiquemos que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ satisface la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Ahora, supongamos que $\mathbf{y}$ es otra solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Así, $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y al multiplicar ambos lados de esta igualdad por A^{-1}, tenemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{y}) &= A^{-1}\mathbf{b} \\ (A^{-1}A)\mathbf{y} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

$[b) \Longrightarrow c)]$ Teniendo en cuenta que si $\mathbf{h}$ es solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por el Corolario 5.1 del Capítulo 2, Pág. 63, $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ es también solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, como la solución es única, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$; por lo tanto, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$; es decir, el vector $\mathbf{0}$ es la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$[c) \Longrightarrow d)]$ Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única, por el Teorema 6 del Capítulo 2, Pág. 67, las columnas de la matriz A son *l.i.*

$[d) \Longrightarrow e)]$ Por el Teorema 6 del Capítulo 2, Pág. 67, si las columnas de A son *l.i.*, toda matriz escalonada equivalente tiene n pivotes.

$[e) \Longrightarrow a)]$ Si una matriz escalonada equivalente a A tiene n pivotes, todas sus filas tienen pivotes; por lo tanto, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para cualquier $\mathbf{b}$; en particular, los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ tienen solución. Como, por definición, la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ es la columna i de la matriz inversa de A, concluimos que la inversa de A existe, por tanto A es invertible.

□

Aunque suene repetitivo, es importante observar que la propiedad $b)$ del Teorema 7 no se utiliza para calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales, pues para calcular la matriz inversa habría que resolver los n sistemas de ecuaciones de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. Como dijimos antes, esta propiedad se debe utilizar en el sentido contrario, si se necesita calcular $A^{-1}\mathbf{b}$, se resuelve el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, evitándose el cálculo de A^{-1}.

Observemos que el Resultado 3 del Teorema 6 nos da una condición suficiente para que el producto de matrices sea invertible. Veamos que la equivalencia entre las proposiciones a) y c) del Teorema 7 nos permite demostrar que la invertibilidad de los factores también es una condición necesaria para la invertibilidad del producto de matrices.

En efecto, supongamos que la matriz B no es invertible; por el Teorema 7, existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por lo tanto, existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y nuevamente, por el Teorema 7, podemos concluir que AB no es invertible.

De otro lado, si la matriz B es invertible y la matriz A no, entonces existe $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{y}$; como $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Además, $AB\mathbf{x} = AB(B^{-1}\mathbf{y}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y por el Teorema 7, podemos concluir que AB no es invertible. Así, hemos demostrado el siguiente corolario.

Corolario 7.1 [*Producto de matrices e invertibilidad*]
Si la matriz AB es invertible y las matrices A y B son cuadradas, entonces las matrices A y B son invertibles.

3.6. Transposición de matrices

Hasta aquí, las operaciones entre matrices son similares a las de los números reales. Introduzcamos una nueva operación que no tiene una análoga en los números reales y se aplica a una sola matriz y que es de mucha utilidad tanto teórica como práctica.

Definición 6 [*Transpuesta de una matriz*]. Dada la matriz A, de tamaño $m \times n$, definimos A^T, la transpuesta de A, como la matriz de tamaño $n \times m$, que se obtiene tomando la i-ésima fila de A como la i-ésima columna de A^T; es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$.

Notemos que si las filas de A son las columnas de A^T, las columnas de A son las filas de A^T.
Ejemplo 16. Encontremos las transpuestas de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al transponer, obtenemos

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

y

$$D^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que, efectivamente, la segunda fila de A, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, es la segunda columna de A^T, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, y que la segunda columna de A, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, es la segunda fila de A^T, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$. □

Notemos también que, cuando los vectores son vistos como matrices, la transposición nos permite interpretar o expresar el producto escalar entre vectores como producto entre matrices. Sean

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T\mathbf{v}. \end{aligned}$$

En forma similar, la transposición de matrices nos permite ver que $\mathbf{e}_i^T A$ es la i-ésima fila de A y que $\mathbf{e}_i^T A\mathbf{e}_j = a_{ij}$, la (i,j)-componente de la matriz A. Su demostración la dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 21).

Veamos ahora, cuáles son las relaciones entre las operaciones básicas y la transposición de matrices.

Teorema 8 [*Propiedades algebraicas de la transpuesta de matrices*]. Sean A y B matrices tales que las operaciones indicadas están bien definidas y λ un número real (escalar). Entonces,

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.(Notemos el orden del producto de las transpuestas)
5. Si A es invertible, A^T también es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demostración: La demostración de las tres primeras propiedades es sencilla y directa, las cuales dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 24). Demostremos las dos últimas.

4. Para demostrar esta propiedad, en primer lugar, observemos que para que el producto AB esté bien definido, si A es una matriz $m \times n$, B debe ser una matriz $n \times p$ y entonces AB es una matriz $m \times p$. Así, B^T es una matriz $p \times n$ y A^T es una matriz $n \times m$, de tal forma que el producto $B^T A^T$ está bien definido y es una matriz $p \times m$, al igual que $(AB)^T$. Denotemos por $fil_i(U)$ a la i-ésima fila de U, por $col_j(U)$ a la j-ésima columna de U y por $(U)_{ij}$ a la componente (i, j) de U. Con esta notación, tenemos

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= fil_j(A) \cdot col_i(B) \\ &= col_j(A^T) \cdot fil_i(B^T) \\ &= fil_i(B^T) \cdot col_j(A^T) \\ &= (B^T A^T)_{ij}. \end{aligned}$$

   En otras palabras, tenemos que la componente (i, j) de $(AB)^T$ es la componente (i, j) de $B^T A^T$. Y, debido a que esto se tiene para cualquier i y j , podemos concluir que $(AB)^T = B^T A^T$.

5. Puesto que A es invertible, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Ahora, por la Propiedad 4,

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I.$$

   Por lo tanto, A^T es invertible y su inversa es $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

□

Las matrices que son iguales a sus transpuestas juegan un papel fundamental en la teoría del álgebra lineal, como veremos en los siguientes capítulos. Ellas reciben un nombre especial derivado de la estructura de sus componentes.

Definición 7 [*Matriz simétrica*]. Una Matriz A de tamaño $n \times n$ es simétrica, si y sólo si, es igual a su transpuesta; es decir, A es simétrica, si y sólo si,

$$A = A^T.$$

Ejemplo 17. Determinemos cuáles de las siguientes matrices son simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -7 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $A = A^T$ y $B = B^T$, mientras que $C^T \neq C$, por tanto A y B son simétricas, mientras que C no lo es. La matriz D, por no ser cuadrada, tampoco es simétrica.

□

Ejemplo 18. Veamos que si A es una matriz de tamaño $m \times n$, AA^T es una matriz simétrica.

Por las Propiedades 1 y 4 del Teorema 8, tenemos que $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$; por lo tanto, AA^T es simétrica. □

3.7. Matrices elementales

Recordemos que el método de eliminación de Gauss consiste en aplicar operaciones elementales entre filas a la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales hasta obtener una matriz escalonada equivalente a ella. Veremos que aplicar una operación elemental a una matriz A es equivalente a pre-multiplicar esta matriz por otra, llamada *matriz elemental*.

Definición 8 [*Matriz elemental*]. Llamamos *matriz elemental* de orden n a una matriz que se obtiene de aplicar una operación elemental entre filas a la matriz identidad I, también de orden n.

Como existen tres tipos de operaciones elementales entre filas (*escalamiento, eliminación* y *permutación*), existen tres tipos de matriz

elemental que reciben los mismos nombres. La estructura de cada tipo de matriz elemental es muy especial como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19. Veamos que las siguientes matrices son elementales.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz E_1 se obtiene de la matriz I_3, al aplicarle la operación elemental de Tipo Escalamiento $\mathbf{5}F_{\mathbf{2}} \longrightarrow F_{\mathbf{2}}$, por lo cual E_1 es una matriz elemental de Tipo Escalamiento. Notemos que la única componente de E_1 diferente a las de I_3 está en la posición (**2,2**), que es **5** en lugar de 1, y que esta posición está relacionada con la fila **2** usada en la operación elemental aplicada, y que **5** es el escalar involucrado en dicha operación.

La matriz E_2 se obtiene de la matriz I_2, al aplicarle la operación elemental de Tipo Eliminación $F_{\mathbf{2}} + (\mathbf{-3})F_{\mathbf{1}} \longrightarrow F_{\mathbf{2}}$, por lo cual E_2 es una matriz elemental de Tipo Eliminación. Notemos que la única componente de E_2 diferente a las de I_2 está en la posición (**2,1**), que es **-3** en lugar de 0, y que esta posición está relacionada con las filas **1** y **2** usadas en la operación elemental aplicada, y que **-3** es el escalar involucrado en dicha operación.

La matriz E_3 se obtiene de la matriz I_4, al aplicarle la operación elemental de Tipo Permutación $F_{\mathbf{1}} \longleftrightarrow F_{\mathbf{3}}$, por lo cual E_3 es una matriz elemental de Tipo Permutación. Notemos que las únicas componentes de E_3 diferente a las de I_4 están en las posiciones (**1,1**), (**1,3**), (**3,1**) y (**3,3**) , que donde había un cero quedó un 1 y viceversa, y que estas posiciones están relacionadas con las filas **1** y **3** usadas en la operación elemental aplicada.

□

En general, la matriz elemental (Tipo Eliminación) correspondiente a la operación elemental $F_{\mathbf{i}} + (c)F_{\mathbf{j}} \longrightarrow F_{\mathbf{i}}$ difiere de la matriz idéntica sólo en la posición $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, donde aparece c en lugar de un cero. Igualmente, la matriz elemental (Tipo Escalamiento) correspondiente a la operación elemental $(c)F_{\mathbf{i}} \longrightarrow F_{\mathbf{i}}$ difiere de la matriz idéntica sólo en la posición $(\mathbf{i}, \mathbf{i})$, donde aparece c en lugar de uno. Y, de la misma forma, la matriz elemental (Tipo Permutación) correspondiente a la operación elemental $F_{\mathbf{i}} \longleftrightarrow F_{\mathbf{j}}$ difiere de la matriz idéntica en las

posiciones $(\mathbf{i},\mathbf{i})$, $(\mathbf{i},\mathbf{j}),(\mathbf{j},\mathbf{i})$ y $(\mathbf{j},\mathbf{j})$, donde aparecen unos en lugar de ceros y viceversa.

Ahora, observemos que pre-multiplicar por una de estas matrices elementales es equivalente a aplicar la operación elemental correspondiente.

Ejemplo 20. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -1/2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar la operación elemental entre filas $F_1 \longleftrightarrow F_2$ a A, obtenemos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y, al pre-multiplicar a A por E_1, la correspondiente matriz elemental Tipo Permutación, obtenemos

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_1.$$

De igual forma, al aplicar la operación elemental entre filas $F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3$ a B, obtenemos

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

y, al pre-multiplicar a B por E_2, la correspondiente matriz elemental Tipo Eliminación, obtenemos

$$E_2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = B_1.$$

Y similarmente, al aplicar la operación elemental entre filas $4F_1 \longrightarrow F_1$ a C, obtenemos

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

y, al pre-multiplicar a C por E_3, la correspondiente matriz elemental Tipo Escalamiento, obtenemos

$$E_3C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -1/2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = C_1.$$

□

Observemos que el orden o tamaño de las matrices elementales es $m \times m$, donde m es el número de filas de la matriz a la cual se le aplica la correspondiente operación elemental entre filas. Observemos también que las operaciones elementales entre filas son reversibles; es decir, que es posible recuperar la matriz a la cual se le ha aplicado una operación elemental entre filas, aplicando al resultado otra operación elemental entre filas. En efecto, si A_1 se obtiene al aplicarle la operación elemental $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$ a A, entonces A se obtiene al aplicarle la operación elemental $F_i - cF_j \longrightarrow F_i$ a A_1. De igual forma, si B_1 se obtiene de aplicarle la operación elemental $cF_i \longrightarrow F_i$ a B, entonces B se obtiene de aplicarle la operación elemental $\frac{1}{c}F_i \longrightarrow F_i$ a B_1 y, finalmente, si C_1 se obtiene de aplicarle la operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$ a C, entonces C se obtiene de aplicarle la misma operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$ a C_1. Esto nos indica que las matrices elementales son invertibles y, aún más, que sus inversas son matrices elementales del mismo tipo, como se resume en el siguiente teorema.

Teorema 9 [*Inversa de las matrices elementales*].
Las matrices elementales son invertibles y la inversa de una matriz elemental es a su vez una matriz elemental del mismo tipo; más exactamente,

1. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$ es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i - cF_j \longrightarrow F_i$.
2. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $cF_i \longrightarrow F_i,\ c \neq 0$ es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $\frac{1}{c}F_i \longrightarrow F_i$.
3. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$ es la matriz elemental correspondiente a la misma operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$.

Demostración: En cada uno de los tres casos, la demostración se hace por cálculo directo (Ejercicio 29).

□

Ejemplo 21. Veamos cuáles son las inversas de cada una de las siguientes matrices elementales

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{-3} & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por el resultado anterior y teniendo en cuenta el tipo de matriz elemental de cada una (eliminación, escalamiento y permutación, respectivamente), tenemos que

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1/5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

□

Volviendo al método de eliminación de Gauss, es claro que siempre es posible obtener una matriz escalonada equivalente a una matriz dada con operaciones elementales solamente de Tipo Eliminación y

Permutación. Así, tenemos que, a partir de una matriz dada A, es posible obtener una matriz triangular superior (o con forma escalonada) U, pre-multiplicando sucesivamente por matrices elementales apropiadas de Tipo Eliminación y Permutación a la matriz A.

Ejemplo 22. (Parte A). Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculemos U, una matriz escalonada equivalente a A, y las matrices elementales $E_1, \cdots, E_k$, tales que

$$E_k \cdots E_1 A = U.$$

Al aplicar operaciones elementales, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 - F_1 \longrightarrow F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 - \tfrac{2}{3}F_2 \longrightarrow F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{U}.$$

□

Si, a la matriz obtenida en el proceso de eliminación de Gauss, continuamos aplicándole las operaciones elementales (Tipo Escalamiento y Tipo Eliminación) requeridas en el método de sustitución hacia atrás, obtenemos una matriz escalonada equivalente donde las columnas pivote son $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{e}_k$, los primeros vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, como pudimos apreciar en el Capítulo 1 e ilustramos en la parte B del Ejemplo 22 que presentamos a continuación[6].

Ejemplo 22. (Parte B). A la matriz obtenida en la Parte A del Ejemplo 22 apliquémosle las operaciones elementales del método de sustitución hacia atrás para obtener la matriz escalonada equivalente, donde las columnas pivote son los primeros vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ *(matriz escalonada reducida)*.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{5}F_3 & \longrightarrow & F_3 \\ F_2+6F_3 & \longrightarrow & F_2 \\ F_1-3F_3 & \longrightarrow & F_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}F_2 & \longrightarrow & F_2 \\ F_1+F_2 & \longrightarrow & F_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las matrices elementales correspondientes a las anteriores operaciones elementales, podemos resumir la parte A y B de este ejemplo con la siguiente expresión

$$(E_7\ E_6\ E_5\ E_4)\ (E_3\ E_2\ E_1\ A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que las columnas pivotales en esta matriz (primera, segunda y cuarta) son precisamente $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, los vectores canónicos

[6]Muchos autores hacen un uso excesivo de este tipo especial de matriz escalonada y la llaman *matriz escalonada reducida* [7], [16].

de $\mathbb{R}^3$, en su orden.

□

Cuando A es una matriz invertible de tamaño $n \times n$, cualquier matriz escalonada equivalente tiene n pivotes (Teorema 7, Pág. 159); por lo tanto, al continuar aplicando las operaciones elementales del método de sustitución hacia atrás, obtenemos como columnas pivote $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{e}_n$, los n vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$; es decir, obtenemos la matriz idéntica de tamaño $n \times n$. Esta importante propiedad de las matrices invertibles la resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 10 [*Caracterización de la inversa en término de matrices elementales*].
Una matriz A de tamaño $n \times n$ es invertible, si y sólo si, la matriz A es el producto de matrices elementales.

Demostración: Si la matriz A es invertible, al aplicar sucesivamente los algoritmos de eliminación de Gauss y sustitución hacia atrás, como se describió previamente, obtenemos la matriz idéntica; es decir, existen matrices elementales $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k$, tales que[7]

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

Pre-multiplicando por las matrices elementales inversas (en el orden apropiado) ambos lados de la expresión anterior, obtenemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I,$$

lo cual está expresando a la matriz A como el producto de matrices elementales, ya que la matriz inversa de una matriz elemental es también una matriz elemental.

En el otro sentido, es obvio que si la matriz A es el producto de matrices elementales, la matriz A es invertible, puesto que las matrices elementales son invertibles y, por el Corolario 7.1, Pág. 161, el producto de matrices invertibles es invertible. □

3.8. Factorización LU

Así como los números enteros se pueden factorizar y de esta factorización se pueden determinar algunas propiedades de ellos, la factorización de matrices es de mucha utilidad tanto práctica como teórica.

[7] Como para encontrar la matriz escalonada equivalente, cada operación elemental *introduce* un cero o un uno en cada posición de la matriz A, podemos afirmar que $k \leq n^2$.

La que veremos en seguida es la llamada factorización LU, la cual se obtiene de una formulación matricial del algoritmo de eliminación de Gauss y nos proporciona una forma equivalente más eficiente de calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales en los casos que dicha factorización exista.

En la eliminación de Gauss, cuando no son necesarias las operaciones o matrices elementales de Tipo Permutación, como en el Ejemplo 22 (Parte A), obtenemos otro resultado importante[8]. En efecto, al pre-multiplicar por las matrices elementales inversas (en el orden apropiado) ambos lados de la expresión

$$E_k \cdots E_1 A = U,$$

obtenemos

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU,$$

donde U es una matriz triangular superior y $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ es una matriz de orden n, triangular inferior, invertible y con unos en la diagonal, por ser el producto de matrices de orden n, triangulares inferiores, invertibles y con unos en la diagonal (Ejercicios 3 y 9). Además, los elementos diferentes de cero de la matriz L son los opuestos de los escalares o multiplicadores involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación usadas en la eliminación de Gauss.

En efecto, obtener la matriz L **no** requiere cálculo adicional como parece hacer ver la fórmula que la define. La matriz L es muy fácil de obtener gracias a que el producto de matrices elementales del Tipo Eliminación es prácticamente una *superposición de escalares* sobre una matriz idéntica cuando el factor izquierdo tiene su escalar en la misma columna o en una columna que antecede a la columna donde está el escalar del factor derecho. Observemos que las matrices elementales que definen a L tienen esta propiedad (el opuesto de los escalares o multiplicadores aparece porque la matriz L está definida como producto de las inversas de las matrices elementales). Ilustremos estos hechos con un ejemplo.

Ejemplo 23. Sean E_1, E_2 y E_3 las matrices elementales de orden 4×4 correspondientes a las operaciones elementales $F_3 + 2F_2 \longrightarrow F_3$,

[8]Cuando, en la Eliminación de Gauss, se utilizan operaciones o matrices elementales de Tipo Permutación, se obtiene un resultado similar al descrito en esta sección, el cual se conoce con el nombre de *Factorización PLU* de A, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior, tales que $PA = LU$; es decir, obtenemos la factorización LU de la matriz que se obtiene de A permutando adecuadamente sus filas, como lo mostramos en el Apéndice A [6], [15].

$F_4 + (-3)F_2 \longrightarrow F_4$ y $F_4 + 5F_3 \longrightarrow F_4$, respectivamente. Observemos la *superposición*, sobre una matriz idéntica, de los escalares $(2,\ -3$ y $5)$ involucrados en las operaciones elementales, al efectuar los productos E_1E_2, E_2E_3 y $E_1E_2E_3$, y que no se tiene en el producto E_3E_1.

$$E_1E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_1E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_3E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si estas tres operaciones elementales fuesen las requeridas para escalonar una matriz dada, la matriz L mencionada anteriormente sería

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Todo lo anterior lo podemos formalizar en el siguiente teorema.

Teorema 11 [*Factorización o descomposición LU*].
Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ para la cual existe U, una matriz escalonada equivalente a A, obtenida mediante el método de eliminación de Gauss sin usar permutaciones ni escalamiento (sólo operaciones elementales de Tipo Eliminación). Entonces, podemos factorizar a A como

$$A = LU,$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal de tamaño $m \times m$, cuya componente $l_{ij} = -c$ para $i > j$, siendo c el escalar o *multiplicador* involucrado en la operación elemental Tipo Eliminación, $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$, que utilizamos para obtener un cero en la posición (i, j) de la matriz U. A esta factorización la llamamos *factorización LU* o *descomposición LU*.

Entre otros usos, esta factorización permite resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, reduciendo su solución a la solución de dos sistemas de ecuaciones lineales que podemos resolver fácilmente. Sabiendo que $A = LU$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se convierte en $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, lo cual es equivalente a $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, donde $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$; por lo tanto, para calcular $\mathbf{x}$, primero resolvemos

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

y a continuación resolvemos

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Observemos que los dos sistemas de ecuaciones lineales anteriores son fáciles de resolver. Por ser L una matriz triangular inferior, el primer sistema se resuelve mediante *sustitución hacia adelante*; además, por ser cuadrada y tener unos en la diagonal, es una matriz invertible; por lo tanto, su solución siempre es única. Por ser U una matriz triangular

superior, el segundo sistema se resuelve mediante *sustitución hacia atrás*. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 24. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Encontremos la factorización LU de A y luego calculemos las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Aplicando sucesivamente las operaciones elementales entre filas a la matriz A

$$\begin{array}{l} F_2 + F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_3 - \frac{2}{3}F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_3 + \frac{6}{8}F_2 \longrightarrow F_3 \end{array} \quad \text{obtenemos} \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Las matrices elementales utilizadas, en su orden, son

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{pmatrix};$$

por lo tanto,

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que, para obtener la matriz L, no es necesario escribir las matrices elementales ni sus inversas ni calcular el producto de estas últimas . En la práctica, la matriz L, la obtenemos sin hacer cálculos como la matriz triangular inferior con unos en la diagonal y los multiplicadores o escalares (1, -2/3 y 3/4) usados en las operaciones elementales en las posiciones definidas en el Teorema 11.

Ahora, utilicemos la factorización LU de A para resolver el sistema dado. Primero, resolvemos el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ mediante sustitución hacia adelante, lo cual es equivalente a aplicar las operaciones elemen-

tales

$$\begin{array}{l} F_2 + F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_3 - \frac{2}{3}F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_3 + \frac{3}{4}F_2 \longrightarrow F_3 \end{array} \quad \text{a la matriz} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 8 \\ 2/3 & -3/4 & 1 & -5 \end{array}\right),$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right);$$

es decir que $\mathbf{y} = (-8 \;\; 0 \;\; 1/3)^T$. Continuamos resolviendo el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mediante sustitución hacia atrás, lo cual es equivalente a aplicar las operaciones elementales

$$\begin{array}{l} F_1 - 3F_3 \longrightarrow F_1 \\ \frac{1}{8}F_2 \longrightarrow F_2 \\ \frac{1}{6}F_1 \longrightarrow F_1 \end{array} \quad \text{a la matriz} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right),$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right);$$

de donde, concluimos que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Supongamos que, posteriormente a lo anterior, para $\mathbf{c} = (-6 \;\; -2 \;\; 2)^T$, necesitamos calcular las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Como ya tenemos la factorización LU de A, no necesitamos empezar de nuevo; sólo necesitamos resolver los sistemas $L\mathbf{y} = \mathbf{c}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, como en el caso anterior. Esto es, resolvemos el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{c}$ mediante sustitución hacia adelante, lo cual es equivalente a aplicar las operaciones elementales

$$\begin{array}{l} F_2 + F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_3 - \frac{2}{3}F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_3 + \frac{3}{4}F_2 \longrightarrow F_3 \end{array} \quad \text{a la matriz} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & -3/4 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

es decir que $\mathbf{y} = (-6 \ \ -8 \ \ 0)^T$. Continuamos resolviendo el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mediante sustitución hacia atrás, lo cual es equivalente a aplicar las operaciones elementales

$$\begin{array}{l} F_1 - 3F_3 \longrightarrow F_1 \\ \frac{1}{8}F_2 \longrightarrow F_2 \\ \frac{1}{6}F_1 \longrightarrow F_1 \end{array} \qquad \text{a la matriz} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

de donde, concluimos que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}t \\ t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

□

Para poder factorizar una matriz A, como vimos en el ejemplo anterior, es necesario conocer las operaciones elementales necesarias para encontrar una matriz escalonada equivalente a ella, lo que usualmente se realiza cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A. Además, resolver el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ requiere tantas operaciones como las requeridas al incluir el vector $\mathbf{b}$ en el proceso de reducción de A a una matriz escalonada equivalente, como lo hicimos en el Capítulo 1 (proceso de eliminación de Gauss aplicado a la matriz aumentada del sistema).

En otras palabras, es claro que la ventaja de la factorización LU no la apreciamos cuando se resuelve un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o varios sistemas simultáneamente, sino cuando necesitamos resolver otro sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, después de haber resuelto el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o cuando, simultáneamente, necesitamos resolver los dos sistemas, pero el vector de términos independientes de uno de los sistemas depende de la solución del otro, como ocurre en la estimación

del Número Condicional de una matriz [6] y en el proceso de Refinamiento Iterativo de la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales [8] o cuando necesitamos resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como ocurre en el Método Simplex para resolver problemas de programación lineal [3]. En resumen, la factorización LU es el procedimiento alternativo para ahorrar tiempo de cómputo cuando necesitamos resolver dos o más sistemas de ecuaciones lineales y la solución simultánea de ellos no es posible, como ya lo habíamos planteado al final del Capítulo 1 (Pág. 31).

Ejemplo 25. Encontremos dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^4$ tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{z}^T A = \mathbf{c}^T$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 18 \\ 4 & -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Observemos que para calcular $\mathbf{z}$, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales $A^T\mathbf{z} = \mathbf{c}$; por lo tanto, no es posible calcular a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{z}$ simultáneamente.

Primero, resolvamos los dos sistemas, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A^T\mathbf{z} = \mathbf{c}$, utilizando, para cada uno de ellos, el algoritmo de eliminación de Gauss seguido del algoritmo de sustitución hacia atrás y luego, los resolvemos utilizando la factorización LU de la matriz A.

Para resolver el primer sistema, aplicamos sucesivamente las operaciones elementales $F_2 + F_1 \longrightarrow F_2$, $F_4 - 2F_1 \longrightarrow F_4$, $F_3 - 3F_2 \longrightarrow F_3$, $F_4 + F_2 \longrightarrow F_4$ y $F_4 - 5F_3 \longrightarrow F_4$ a la matriz aumentada $[A|\mathbf{b}]$ y obtenemos la matriz escalonada

$$[U|\mathbf{y}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Finalmente, aplicando el algoritmo de sustitución hacia atrás, tenemos que $\mathbf{x} = (2 \;\; 0 \;\; -3 \;\; 1)^T$.

Para resolver el segundo sistema, aplicamos sucesivamente las operaciones elementales $F_2 + 0{,}5F_1 \longrightarrow F_2$, $F_3 - 1{,}5F_1 \longrightarrow F_3$, $F_4 - \frac{5}{3}F_2 \longrightarrow F_4$ y $F_4 + 3F_3 \longrightarrow F_4$ a la matriz aumentada $[A^T|\mathbf{c}]$ y obtenemos la

matriz escalonada

$$[V|\mathbf{r}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Por último, aplicando el algoritmo de sustitución hacia atrás, tenemos que $\mathbf{z} = (-34 \ \ -39 \ \ 12 \ \ -2)^T$.

Ahora, resolvamos los mismos sistemas utilizando la factorización LU de A, para lo cual, debemos encontrar una matriz escalonada equivalente a la matriz A, utilizando el algoritmo de eliminación de Gauss. Aplicando sucesivamente las operaciones elementales $F_2 + F_1 \longrightarrow F_2$, $F_4 - 2F_1 \longrightarrow F_4$, $F_3 - 3F_2 \longrightarrow F_3$, $F_4 + F_2 \longrightarrow F_4$ y $F_4 - 5F_3 \longrightarrow F_4$ a la matriz A, obtenemos la matriz escalonada

$$U = \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Teniendo en cuenta las operaciones elementales utilizadas y la definición de la matriz L, tenemos que

$$L = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Como $A = LU$, para calcular $\mathbf{x}$, resolvemos, mediante sustitución hacia adelante, el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, de donde obtenemos que $\mathbf{y} = (-5 \ \ 5 \ \ 6 \ \ -2)^T$ y, mediante sustitución hacia atrás, el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, para finalmente obtener que $\mathbf{x} = (2 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 1)^T$.

Como $A^T = U^T L^T$, para calcular $\mathbf{z}$, resolvemos, mediante sustitución hacia adelante, el sistema $U^T\mathbf{w} = \mathbf{c}$, de donde obtenemos que $\mathbf{w} = (1 \ \ -1 \ \ 2 \ \ -2)^T$ y, mediante sustitución hacia atrás, el sistema $L^T\mathbf{z} = \mathbf{w}$, para finalmente obtener que $\mathbf{z} = (-30 \ \ 39 \ \ 12 \ \ -2)^T$.

□

De las dos formas presentadas para resolver el problema anterior, observemos que el cálculo del vector $\mathbf{x}$ es prácticamente idéntico en ambas. Efectivamente, en las dos formas, se aplican las mismas operaciones elementales para encontrar la matriz escalonada equivalente a

A y se resuelve el mismo sistema triangular $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ usando el algoritmo de sustitución hacia atrás. La diferencia aparente está en que, en la primera forma, las operaciones elementales se aplican a la matriz aumentada para obtener el vector $\mathbf{y}$, mientras que en la segunda, las operaciones elementales se aplican sólo a la matriz de coeficientes del sistema y luego, se resuelve el sistema triangular $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ usando el algoritmo de sustitución hacia adelante, procedimientos que requieren exactamente las mismas operaciones. La diferencia *(ventaja)* de calcular la factorización LU de la matriz A es que evita tener que utilizar el algoritmo de eliminación de Gauss para el cálculo del vector $\mathbf{z}$, lo cual es importante si tenemos en cuenta que es precisamente este algoritmo la parte que más cálculos requiere en el proceso de resolver un sistema de ecuaciones lineales.

3.9. Determinantes

El concepto de determinante de una matriz surgió independientemente del concepto de matriz y su teoría fue desarrollada, hace casi dos siglos, para solucionar problemas prácticos [2]. Hoy en día, ha perdido su importancia práctica por su costo en tiempo de cálculo y por el desarrollo de otras técnicas de cómputo que lo reemplazan. No obstante, por su importancia teórica, presentamos el concepto de determinante y sus propiedades más usadas.

Para empezar, digamos que el determinante de una matriz *(cuadrada)* es un número real, el cual definiremos en término de determinantes de matrices de tamaño menor, es decir, usaremos la recurrencia en la definición de determinante. Como motivación y guía para la comprensión de las definiciones de *menor*, *determinante* y *cofactor* de una matriz, veamos los tres casos generales más sencillos.

1. El determinante de $A = (\alpha)$, una matriz 1×1, es α
2. El determinante de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, una matriz 2×2, es $ad - bc$.
3. El determinante de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, una matriz 3×3, es a por el determinante de $\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$ menos b por el determinante

de $\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$ más c por el determinante de $\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$, lo que es igual a

$$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

Para presentar la definición de determinante, primero veamos el concepto de *menor de una matriz* y luego, como una forma de simplificar la expresión que define un determinante, introduciremos la noción de *cofactor de una matriz*. Este último concepto también será utilizado, al final de esta sección, para definir la *matriz adjunta*.

Definición 9 [*Menor*]. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, definimos M_{ij}, *el menor* (i, j) de A, como la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

Ejemplo 26. Encuentre los menores M_{23} y M_{32} de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al eliminar la segunda fila y tercera columna de A, obtenemos M_{23}, el menor $(2, 3)$ de la matriz A,

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y al eliminar la tercera fila y segunda columna de A, obtenemos M_{32}, el menor $(3, 2)$ de la matriz A,

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Definición 10 [*Determinante*]. Sean $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos $\det(\alpha)$, *el determinante* de una matriz 1×1, como α y $\det\ A$, *el determinante*[9]de A, como la suma de los productos de a_{1j}, la j-ésima componente de la primera fila de la matriz A, por $\det M_{1j}$, el determinante del menor $(1, j)$ de A, multiplicado por $(-1)^{1+j}$; es decir,

$$\det(\alpha) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det M_{1n}. \tag{3.1}$$

Ejemplo 27. Calculemos el determinante de una matriz 2×2. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces, por la definición anterior, tenemos

$$\det A = a \det M_{11} - b \det M_{12} = a \det(d) - b \det(c) = ad - bc,$$

como ya lo habíamos anunciado al principio de esta sección.

□

Para simplificar la expresión (3.1), la cual define el determinante de una matriz $n \times n$, introduzcamos la siguiente definición, que, como dijimos en la introducción, también será usada al final de esta sección, para definir la matriz adjunta.

Definición 11 [*Cofactor*]. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, definimos A_{ij}, *el cofactor* (i, j) de A, como el escalar que resulta al multiplicar el determinante de M_{ij},el menor (i, j) de A, por $(-1)^{i+j}$, es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Ejemplo 28. Dada la matriz A del Ejemplo 26, calcule los cofactores A_{23} y A_{33}.

Según la definición anterior y usando el resultado del ejemplo anterior,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = - [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = 2$$

y

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = 1$$

□

Hasta el momento, debemos tener claro que un menor de una matriz $n \times n$ es una matriz $(n-1) \times (n-1)$ y que un cofactor de una matriz es un número real. Además, veamos que, usando la definición de cofactor,

[9] También utilizamos $|A|$ como notación para el determinante de la matriz A.

la expresión (3.1), para el caso de una matriz $n \times n$, se reduce a la suma de los productos de las componentes de la primera fila de A por sus cofactores correspondientes; es decir,

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}, \tag{3.2}$$

lo cual nos será útil, especialmente, en los desarrollos teóricos sobre determinantes.

Ejemplo 29. Calculemos el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 7 & 1/2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando (3.2) y el resultado del Ejemplo 27, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad +1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\ [3(-2) - 1(-1)] - 1\ [2(-2) - 1 \cdot 1] \\ &\quad +1\ [2(-1) - 3 \cdot 1] \\ &= -5 + 5 - 5 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{-2} & 0 \\ 7 & 1/2 & 4 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} &= b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13} + b_{14}B_{14} \\ &= \mathbf{1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1/2 & 4 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad +0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1/2 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}\left\{\mathbf{3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= \mathbf{1}\cdot\mathbf{3}\left[(\mathbf{-2})(-1) - 0\cdot 4\right] = \mathbf{1}\cdot\mathbf{3}(\mathbf{-2})(\mathbf{-1}) = 6$$

□

Podemos ver que calcular un determinante es más tedioso, en la medida que el tamaño de la matriz sea más grande. Notemos que el cálculo del determinante de una matriz 2×2 requiere 2 multiplicaciones y una suma. El cálculo del determinante de una matriz 3×3 implica el cálculo del determinante de 3 matrices 2×2. El cálculo del determinante de una matriz 4×4 implica el cálculo del determinante de 4 matrices 3×3 y por tanto, el cálculo del determinante de $4 \cdot 3 = 12$ matrices 2×2. Así, por ejemplo, el cálculo del determinante de una matriz 10×10 implica el cálculo del determinante de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1'814{,}400$ matrices 2×2, lo cual requiere al menos $2 \cdot 1'814{,}400 = 3'628{,}800$ multiplicaciones (además de un número similar de sumas)[10]. Esta enorme cantidad de operaciones nos obliga a buscar propiedades que nos permitan diseñar métodos más eficientes para calcular un determinante.

Un resultado sorprendente es que al calcular la suma del producto de las componentes de cualquier fila o columna de una matriz por sus cofactores correspondientes, obtenemos el mismo resultado, como lo enunciamos en el siguiente teorema, conocido como la Expansión de Laplace y cuya demostración omitimos, ya que es un poco extensa.

Teorema 12 [*Desarrollo o Expansión de Laplace*] [7].
Dada $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$, y

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

para cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$. (estas formas de calcular el determinante las llamaremos *desarrollo por cofactores utilizando la i-ésima fila*, en el primer caso, y *la j-ésima columna*, en el segundo).

[10] El cálculo del determinante de una matriz $n \times n$ implica el cálculo del determinante de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 = \frac{n!}{2}$ matrices 2×2, lo cual requiere al menos $2 \cdot \frac{n!}{2} = n!$ multiplicaciones (además de un número similar de sumas).

Este teorema nos permite concluir que el determinante de una matriz y su transpuesta es el mismo.

Corolario 12.1 [*Determinante de la transpuesta*]
Dada A, una matriz $n \times n$,

$$\det A = \det A^T.$$

Ejemplo 30. Calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

usando el desarrollo por cofactores de dos filas diferentes y por una de sus columnas.

Usando la fila 2, tenemos

$$\begin{aligned}
\det A &= 0A_{21} + 4A_{22} - 2A_{23} + 0A_{24} \\
&= 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \end{vmatrix} - 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-7} \end{vmatrix} \\
&= 4(\mathbf{-7})(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad +2\left\{\mathbf{5}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{-7}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\right\} \\
&= -28(2+0) + 2\{-5(4+9) - 7(0-3)\} \\
&= -56 + 2\{-65 + 21\} = -144
\end{aligned}$$

Usando la fila 4, tenemos

$$\begin{aligned}
\det A &= 0A_{41} + 5A_{42} + 0A_{43} - 7A_{44} \\
&= 5(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 7(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & 4 & -2 \\ \mathbf{-3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 5(\mathbf{-2})(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad -7\left\{\mathbf{2}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{-3}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

$$= -10(4+9) - 7\{2(4+0) - 3(2-0)\}$$
$$= -130 - 7\{8-6\} = -144$$

Finalmente, usando la columna 1, tenemos

$$\begin{aligned}
\det A &= 2A_{11} + 0A_{21} - 3A_{31} + 0A_{41} \\
&= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 5 & 0 & -7 \end{vmatrix} - 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & \mathbf{0} & 3 \\ 4 & \mathbf{-2} & 0 \\ 5 & \mathbf{0} & -7 \end{vmatrix} \\
&= 2\left\{\mathbf{1}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + \mathbf{2}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right\} \\
&\quad -3(\mathbf{-2})(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \\
&= 2\{-28 - 0 - 2(0+10)\} + 6(7-15) \\
&= 2(-48) + 6(-8) = -144
\end{aligned}$$

□

El Teorema 12, al igual que el ejemplo anterior, nos sugiere que debemos calcular los determinantes utilizando las filas o columnas con mayor número de ceros y así, reducir el número de cofactores a calcular. Por ejemplo, observemos que si la matriz es diagonal o triangular, como la matriz B del Ejemplo 29, el cálculo del determinante se simplifica enormemente.

Teorema 13 [*Determinante de una matriz triangular o diagonal*]. El determinante de una matriz diagonal o triangular es el producto de los elementos de su diagonal. En otras palabras, si $A_{(n)} = (a_{ij})$ es una matriz diagonal o triangular de tamaño $n \times n$, entonces

$$\det A_{(n)} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{3.3}$$

Demostración: Usando la inducción matemática sobre el tamaño de la matriz, hagamos la demostración para una matriz triangular inferior. Si $A_{(2)}$ es una matriz triangular inferior 2×2, usando el resultado del Ejemplo 27, tenemos

$$\det A_{(2)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad - 0c = ad.$$

Supongamos que (3.3) es válido para matrices triangulares inferiores de tamaño $(n-1)\times(n-1)$, es decir,

$$\det A_{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1n-1}.$$

Demostremos que (3.3) es válido para matrices triangulares inferiores de tamaño $n\times n$. Usando la hipótesis de inducción para calcular el determinante de A por su desarrollo por cofactores de la primera fila, tenemos

$$\begin{aligned}\det A_{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}\ldots a_{nn}).\end{aligned}$$

De manera similar, probamos que (3.3) es válido para matrices triangulares superiores. El resultado (3.3) para matrices diagonales lo obtenemos recordando que una matriz diagonal es una matriz triangular. □

Este resultado es importante tanto para nuestro propósito de desarrollar una forma eficiente de calcular un determinante, como para la exploración y demostración de sus propiedades más usadas, por dos razones. Primero, como vimos en la Sección 7, toda matriz se puede reducir a una matriz escalonada equivalente mediante operaciones elementales entre filas; y segundo, las propiedades básicas de los determinantes, las cuales presentamos en los siguientes teoremas, permiten establecer una relación bastante simple entre el determinante de una matriz y el determinante de una matriz escalonada equivalente, la cual también es una matriz triangular.

Teorema 14 [*Propiedades básicas de los determinantes*].
Dada una matriz A de tamaño $n\times n$

1. Si A tiene una fila (o columna) de ceros, $\det A = 0$.
2. Si la matriz B se obtiene al intercambiar dos filas (o columnas) de A, $\det B = -\det A$.

3. Si la matriz A tiene dos filas (o columnas) iguales, $\det A = 0$.
4. Si la matriz B se obtiene de A al multiplicar una fila (o columna) por un escalar λ, $\det B = \lambda \det A$.
5. Si A, B y C son matrices iguales excepto en la i-ésima fila de tal forma que la i-ésima fila (o columna) de C es la suma de las correspondientes i-ésimas filas (o columnas) de A y B, $\det C = \det A + \det B$.
6. Si la matriz B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila (o columna) a otra fila (o columna), $\det B = \det A$.

Demostración: Haremos las pruebas de estas propiedades en términos de filas. Las pruebas directas de ellas, en términos de columnas, son completamente análogas o son resultados inmediatos al utilizar el Corolario 12.1.

1. Si la i-ésima fila de A es de sólo ceros, al desarrollar el determinante por cofactores utilizando esta fila, obtenemos

$$\det A = 0A_{i1} + 0A_{i2} + \ldots + 0A_{in} = 0$$

2. Haremos la prueba por inducción sobre el tamaño de la matriz. Podemos ver que, en matrices 2×2, la propiedad es válida.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(cb - da) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Supongamos que el resultado es válido para matrices de tamaño $(n-1) \times (n-1)$. Si la matriz B se obtiene de A al intercambiar las filas i y j, para $r \neq i, j$, la fila r de A es igual a la fila r de B, los menores correspondientes a la r-ésima fila de las matrices A y B son de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y los menores de B se obtienen intercambiando dos filas en los correspondientes menores de A; por lo tanto, los cofactores de B tienen signo contrario a los correspondientes cofactores de A por la hipótesis de inducción.

Así, que

$$\begin{aligned}\det A &= a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} \\ &= b_{r1}(-B_{r1}) + b_{r2}(-B_{r2}) + \ldots + b_{rn}(-B_{rn}) \\ &= -[b_{r1}B_{r1} + b_{r2}B_{r2} + \ldots + b_{rn}B_{rn}] \\ &= -\det B,\end{aligned}$$

3. Supongamos que las filas i y j son iguales. Al intercambiar estas dos filas, por la propiedad anterior, el determinante cambia de signo. Pero al intercambiar estas dos filas, obtenemos la misma matriz , así que el determinante es el mismo. Como el único número que es igual a su opuesto es el 0, el determinante de la matriz debe ser 0.

4. Si B es la matriz que se obtiene de multiplicar la i-ésima fila de A por λ, al calcular el determinante de B utilizando esta fila, tenemos que

$$\begin{aligned}\det B &= b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots + b_{in}B_{in} \\ &= \lambda a_{i1}A_{i1} + \lambda a_{i2}A_{i2} + \cdots + \lambda a_{in}A_{in} \\ &= \lambda(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}) \\ &= \lambda \det A.\end{aligned}$$

5. Al calcular el determinante de C utilizando la i-ésima fila, como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$\begin{aligned}\det C &= c_{i1}C_{i1} + c_{i2}C_{i2} + \cdots + c_{in}C_{in} \\ &= (a_{i1} + b_{i1})C_{i1} + (a_{i2} + b_{i2})C_{i2} + \cdots + (a_{in} + b_{in})C_{in} \\ &= (a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}) \\ &\qquad +(b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \cdots + b_{in}C_{in}) \\ &= (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &\qquad +(b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots + b_{in}B_{in}) \\ &= \det A + \det B\end{aligned}$$

ya que los cofactores de A, B y C correspondientes a la i-ésima fila son iguales.

6. Si la matriz B se obtiene de A al sumarle λ veces la j-ésima fila

a la i-ésima fila, entonces

$$\begin{aligned}\det B &= b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots + b_{in}B_{in} \\ &= (a_{i1} + \lambda a_{j1})B_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})B_{i2} + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})B_{in} \\ &= (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &\qquad + \lambda(a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in}) \\ &= \det A + \lambda 0 \\ &= \det A\end{aligned}$$

ya que los cofactores de las i-ésimas filas de A y B son los mismos y que

$$(a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in})$$

corresponde al cálculo del determinante de una matriz que tiene las filas i y j iguales, utilizando la i-ésima fila. □

Con los resultados del teorema anterior, podemos conocer el determinante de las matrices elementales.

Corolario 14.1 [*Determinante de las matrices elementales*]
Sea E una matriz elemental $n \times n$.

1. Si E es de Tipo Permutación, entonces $\det E = -1$.
2. Si E es de Tipo Escalamiento (resulta de multiplicar una fila de I por c), entonces $\det E = c$.
3. Si E es de Tipo Eliminación, entonces $\det E = 1$.

Teniendo en cuenta que pre-multiplicar una matriz por una matriz elemental es equivalente a aplicarle a la matriz la operación elemental correspondiente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 14.2 [*Determinante del producto por una matriz elemental*]
Sean E y A matrices de igual tamaño, donde E es una matriz elemental. Entonces

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

Como dijimos anteriormente, las propiedades de los determinantes presentadas hasta ahora y el algoritmo de eliminación de Gauss para escalonar una matriz nos permiten proponer una forma eficiente de calcular un determinante. Recordemos que, dada una matriz de tamaño $n \times n$, podemos encontrar una matriz escalonada equivalente mediante operaciones elementales entre filas de Tipo Eliminación y Permutación solamente, lo cual es equivalente a decir que existen $E_1,\ E_2\ \ldots,\ E_k$, matrices elementales de Tipo Eliminación y Permutación, tales que

$$U = E_k \ldots\ E_2 E_1 A,$$

donde U es una matriz escalonada (triangular superior) de tamaño $n \times n$. Utilizando este resultado, el siguiente teorema propone la forma eficiente de calcular un determinante antes anunciada.

Teorema 15 [*Cálculo del determinante de una matriz*].
Dada A, una matriz de tamaño $n \times n$, sea $U = (u_{ij})$ la matriz triangular superior obtenida mediante la aplicación de operaciones elementales Tipo Eliminación y Permutación a la matriz A. Entonces,

$$\det A = (-1)^p u_{11} u_{22} \cdots u_{nn},$$

donde p es el número de operaciones elementales Tipo Permutación utilizadas para obtener la matriz U a partir de la matriz A.

Demostración: Sean $E_1,\ E_2, \ldots,\ E_k$ las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales aplicada a A para obtener U. Entonces,

$$U = E_k \cdots\ E_2 E_1 A.$$

Por el Corolario 14.2,

$$\det U = (\det E_k) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det A).$$

Como $\det E_i = -1$ para las p matrices elementales Tipo Permutación y $\det E_i = 1$ para el resto de matrices elementales (Corolario 14.1), tenemos

$$\det U = (-1)^p \det A.$$

Finalmente, como U es una matriz triangular superior, por el Teorema 13, tenemos

$$\det A = (-1)^p \det U = (-1)^p u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}. \qquad \square$$

Ejemplo 31. Calculemos el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -5 & 3 & 8 \\ -6 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y de } B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 16 \\ -6 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando sucesivamente las operaciones elementales $F_1 \longleftrightarrow F_4$, $F_2 - \frac{1}{2}F_1 \longrightarrow F_2$, $F_3 - F_1 \longrightarrow F_3$, $F_2 \longleftrightarrow F_3$, $F_4 + \frac{2}{3}F_2 \longrightarrow F_4$ y $F_4 - \frac{1}{3}F_3 \longrightarrow F_4$ a la matriz A, obtenemos una matriz escalonada equivalente

$$U = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\det A = (-1)^2 \det U = (-6)(-9)3(-2/3) = -108$, puesto que se realizaron dos operaciones elementales Tipo Permutación, además de las operaciones Tipo Eliminación.

De la misma forma, aplicando sucesivamente las operaciones elementales $F_2 + \frac{3}{4}F_1 \longrightarrow F_2$, $F_3 - \frac{1}{2}F_1 \longrightarrow F_3$, $F_2 \longleftrightarrow F_3$ a la matriz B, obtenemos una matriz escalonada equivalente

$$U = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\det B = (-1)^1 \det U = (-1)8(1)(8) = -64$, ya que se realizó una operación elemental Tipo Permutación, además de las operaciones Tipo Eliminación. □

El resultado anterior nos permite probar una relación teórica importante entre determinantes e invertibilidad de matrices, la cual consignamos en el siguiente corolario.

Corolario 15.1 [*Invertibilidad y determinantes*]
Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. La matriz A es invertible, si y sólo si, $\det A \neq 0$.

Demostración: Sea U la matriz triangular superior obtenida mediante la aplicación de operaciones elementales Tipo Eliminación y Permutación a la matriz A. Por el Teorema 15, $\det A \neq 0$, si y sólo si, $u_{ii} \neq 0$ para todo i, lo cual ocurre, si y sólo si, U tiene n pivotes, lo

cual, por el Teorema 7, Pág.159, es equivalente a que A es invertible. □

Como podemos verificar directamente (ver Ejemplo 32), el determinante no tiene la propiedad distributiva con la suma de matrices, pero si con el producto de matrices. Además, tiene una propiedad particular respecto de el producto por escalar de matrices, como lo expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 16 [*Otras propiedades de los determinantes*]
Si A y B son matrices $n \times n$ y α un número real (escalar), entonces

1. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
2. $\det(AB) = \det A \det B$.
3. $\det(A^m) = (\det A)^m$.

Demostración:

1. Al multiplicar una fila por un escalar α, por el Teorema 14, el determinante de la nueva matriz es α veces el determinante de la matriz original y multiplicar una matriz por un escalar α es equivalente a multiplicar cada una de sus filas por α, así que el determinante de αA es el determinante de A multiplicado por α, n veces; es decir, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

2. Separemos la demostración en dos casos, según la invertibilidad de la matriz A. Sea A una matriz no invertible. Entonces, por el Corolario 7.1, Pág. 161, AB tampoco es invertible, por el Corolario 15.1, $\det A = 0$ y $\det(AB) = 0$; así que $\det(AB) = \det A \det B$.
   Sea A una matriz invertible. Por el Teorema 10, Pág. 171, existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

   $$E_k \cdots E_2 E_1 = A,$$

   por tanto,

   $$\det(AB) = \det((E_k \cdots E_2 E_1)B) = \det(E_k(\cdots(E_2(E_1 B))\cdots)).$$

   Aplicando el Corolario 14.2 repetidamente, obtenemos que

   $$\det(AB) = (\det E_k) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det B)$$

y como, por el mismo Corolario 14.2,

$$\det A = (\det E_k) \cdots (\det E_2)(\det E_1),$$

entonces, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

3. Usando la inducción matemática sobre la potencia m, por el resultado anterior,

$$\det(A^2) = \det(AA) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2.$$

Supongamos que el resultado es válido para $m-1$; es decir, $\det(A^{m-1}) = (\det A)^{m-1}$. Entonces, por el resultado anterior y la hipótesis de inducción, tenemos

$$\begin{aligned}\det(A^m) &= \det(AA^{m-1}) = (\det A)\det(A^{m-1}) \\ &= (\det A)(\det A)^{m-1} = (\det A)^m.\end{aligned}$$

□

Corolario 16.1 [*Determinante de la matriz inversa*]
Si A es una matriz invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Demostración: Como $AA^{-1} = I$, por el Resultado 2 del teorema anterior, $(\det A)\det(A^{-1}) = 1$, de donde obtenemos la igualdad deseada despejando $\det(A^{-1})$.

□

Es importante que notemos que, aunque $AB \neq BA$, $\det(AB) = \det(BA)$ y que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en general.

Ejemplo 32. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule $\det A$, $\det B$, $\det(2A)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$.

Por el tamaño de la matrices y la cantidad de ceros en una misma fila o columna, calculemos el determinante de A y B usando su desarrollo por cofactores de la tercera fila de A y la segunda columna de B.

$$|A| = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(0-2) = -6$$

$$|B| = 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3(-4-0) = 12$$

Apliquemos las propiedades de los determinantes para calcular los determinantes de $2A$ y AB

$$|2A| = 2^3|A| = 8(-6) = -48 \quad \text{y} \quad |AB| = |A||B| = (-6)12 = -72\,.$$

Como el determinante no es distributivo con la suma de matrices, debemos calcular $A+B$ para calcular su determinante.

$$\begin{aligned} |A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (2+3)+(3-6) = 2 \end{aligned}$$

Observemos que $|A+B| \neq |A| + |B|$.

□

Otra propiedad teórica sobre los determinantes está relacionada con la llamada matriz adjunta, la cual permite escribir cada una de las componentes de la matriz inversa de una matriz invertible en término de determinantes. Sobra advertir que esta propiedad, en general, no es un elemento de cálculo, por el alto costo computacional involucrado en el cálculo de los determinantes, así sea usando la eliminación de Gauss.

Definición 12 [*Adjunta*]. Dada A una matriz de tamaño $n \times n$, definimos la *matriz de cofactores* de A como la matriz cuya componente (i,j) es el cofactor A_{ij} y definimos $Adj(A)$, la *matriz adjunta de* A, como la transpuesta de la matriz de cofactores de A. En otras palabras,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 33. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1/2 & 4 \end{pmatrix}$, calculemos la matriz adjunta de A.

Para calcular la adjunta de A, tenemos que calcular los 9 cofactores de A:

$$\begin{array}{lllllllll} A_{11} & = & -3 & A_{12} & = & -18 & A_{13} & = & 15/2 \\ A_{21} & = & -12 & A_{22} & = & 8 & A_{23} & = & 20 \\ A_{31} & = & -6 & A_{32} & = & 4 & A_{33} & = & -5 \end{array}$$

Así que

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -6 \\ -18 & 8 & 4 \\ 15/2 & 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

□

Es fácil ver que al multiplicar la matriz $Adj(A)$ por la matriz A, obtenemos $(\det A)I_3$ (Ejercicio 47). Este resultado es válido en general, como lo expresa el siguiente teorema.

Teorema 17 [*Propiedad básica de la adjunta*]
Si A es una matriz cuadrada, entonces

$$A\ Adj(A) = (\det A)I = Adj(A)\ A.$$

Demostración: Observemos que, en el producto

$$A\ Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

la componente (i, j) es

$$\begin{aligned} fil_i(A) \cdot col_j(AdjA) &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}. \end{aligned}$$

Este producto es el desarrollo por cofactores del determinante de la matriz A', que se obtiene de la matriz A al reemplazar la fila j por la fila i. Cuando $i \neq j$, la matriz A' tiene dos filas iguales, por tanto su determinante es 0. Así que la componente (i, j) de $A\ Adj(A)$ es 0, cuando $i \neq j$. Pero, cuando $i = j$, este producto es el desarrollo

por cofactores del determinante de la matriz $A' = A$ usando la fila i. La demostración de la segunda igualdad del teorema es similar a la anterior.

□

Este resultado nos permite una caracterización de la inversa de una matriz cuando $\det A \neq 0$, lo cual resumimos en el siguiente corolario.

Corolario 17.1 [*Relación entre matriz inversa y matriz adjunta*] Si A es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)$$

Demostración: Si A es una matriz invertible, $\det A \neq 0$; por lo tanto, usando las propiedades del producto de matrices y el teorema anterior, tenemos

$$A\left(\frac{1}{\det A} Adj(A)\right) = \frac{1}{\det A}\left(A\ Adj(A)\right) = \frac{1}{\det A}(\det A)I = I.$$

□

Ejemplo 34. Calculemos la componente $(3,2)$ de la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A^{-1} = (\alpha_{ij})$. Por el teorema anterior y la definición de matriz adjunta, $\alpha_{32} = \dfrac{A_{23}}{|A|}$. Calculemos el determinante de A usando operaciones elementales entre filas para calcular una matriz escalonada equivalente a A. En este caso, aplicando sucesivamente las operaciones elementales $F_3 + 2F_1 \longrightarrow F_3$ y $F_4 + 3F_2 \longrightarrow F_4$, obtenemos la matriz escalonada

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, como no hubo permutación de filas,

$$|A| = |U| = (-2)(-1)(-5)(-5) = 50.$$

Ahora, para calcular A_{23}, el cofactor $(2,3)$ de A, debemos calcular el determinante de $M_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, el menor $(2,3)$ de A.

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -(-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2[0(1) - 3(-1)] = 6.$$

En consecuencia, la componente $(3,2)$ de la inversa de A es

$$\alpha_{32} = \frac{A_{23}}{|A|} = \frac{6}{50} = 0{,}12.$$

□

Corolario 17.2 [*Determinante de la matriz adjunta*]
Si A es una matriz $n \times n$, entonces

$$\det[Adj(A)] = (\det A)^{n-1}$$

Demostración: Si A es una matriz $n \times n$, por el Teorema 17,

$$A\ Adj(A) = (\det A)\ I;$$

por lo tanto, usando las propiedades del determinante, Teorema 16, tenemos

$$(\det A)\ (\det[Adj(A)]) = (\det A)^n.$$

Si $\det A \neq 0$, simplificando, concluimos que $\det[Adj(A)] = (\det A)^{n-1}$ y, como si $\det A = 0$, $Adj(A)$ es no invertible (Ejercicio 49), también se satisface la ecuación.

□

Ejemplo 35. Calculemos el determinante de la matriz adjunta de la matriz del Ejemplo 34.

Usando el resultado del Corolario 17.2, no es necesario calcular la matriz adjunta. En efecto, como $\det A = 50$ y A es 4×4,

$$\det(Adj(A)) = (\det A)^{n-1} = 50^3 = 125{,}000$$

□

3.10. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	**Página**	**Conceptos**	**Página**
Matriz	140	Matriz inversa	154
Componente de una matriz	140, 140	Transpuesta de una matriz	161
Fila y columna de una matriz	140	Matriz simétrica	164
Orden (tamaño) de una matriz	140	Matriz elemental	164
Matriz triangular	141	Inversa de una matriz elemental	167
Matriz Diagonal	141	Matriz escalonada reducida	170
Matriz Idéntica	141	Factorización LU	171, 174
Matriz cero o nula	142	Sustitución hacia adelante	174
Matrices iguales	142	Menor de una matriz	181
Suma de matrices	143	Determinante de una matriz	181
Producto por escalar de matrices	143	Cofactor de una matriz	182
Producto de matrices	146	Matriz adjunta	195
Matriz invertible	154	Determinante de la adjunta	198

1. Dadas las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

clasifíquelas en triangulares inferiores, triangulares superiores, escalares o diagonales.

2. ¿Qué información de cada uno de los siguientes tipos de matrices es suficiente y necesario guardar para reconstruir toda la matriz? (Dado que se conoce el tipo de matriz).

   a) Triangular inferior b) Diagonal c) Escalar d) Simétrica.

3. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores (superiores) es una matriz triangular inferior (superior). [AYUDA: Utilice el Teorema 2, Pág. 148, y observe que cuando $i > j$ ($i < j$), todos los sumandos son cero porque uno de los dos factores en ellos es cero.]

4. Demuestre el Teorema 1, Pág. 144. [AYUDA: Ver demostración del Teorema 1 del Capítulo 2. Pág. 52]

5. Demuestre el Teorema 2, Pág. 148.

6. ¿Qué tipo de matriz es la suma de dos matrices diagonales? ¿El producto de las matrices diagonales?

7. ¿Qué tipo de matriz es el producto por un escalar de una matriz diagonal? ¿Su transpuesta? ¿Su inversa?.

8. ¿Qué tipo de matriz es el producto por un escalar de una matriz triangular? ¿Su transpuesta? ¿Su inversa?

9. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores (superiores) con unos en la diagonal es una matriz triangular inferior (superior) con unos en la diagonal. [AYUDA: Utilice el Teorema 2, Pág. 148 y observe que los elementos de la diagonal del producto son el producto de los elementos de la diagonal de los factores.]

10. Para cada una de las siguientes situaciones, defina las componentes de una matriz que permita almacenar la información correspondiente, indicando el tamaño y el tipo de la matriz.

    a) La empresa NM&M produce 10 tipos de productos en 7 plantas de producción. *Información:* Producción por tipo de producto en cada planta.

    b) La Universidad del Valle tiene 256 salones y un horario académico de 7:00 am a 10:00 pm. *Información:* Uso de los salones (ocupado o desocupado) en cada una de las horas del horario académico.

c) La ciudad de Cali tiene 315 barrios. *Información:* Distancia entre cada barrio y todos los demás.

d) Una **red** (eléctrica, de transporte, de comunicaciones, etc) está compuesta por **nodos** (puntos de la red) y **tramos** (unión de dos nodos). *Información:* Tramos de una red de n nodos.

11. Analice el Ejemplo 8, Pág. 148.

12. Dadas las matrices A, B, C y D, identifique las expresiones matriciales que están bien definidas y calcúlelas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $2(A-B)+3A+2B$ *b*) $-3(A+B-C)-2D$
c) $-2(ACB+DCB)$ *d*) $3[-5(A+2B-D)] -2[1/2(A+2B-D)]$
e) $A^TB+A^TD+C^TD$ *f*) $(A^TD)^{-1}-C^{-1}$

13. Para las matrices A y D del Ejercicio 12, resuelva la siguiente ecuación matricial.

$$A - 2X + 3D = -A - 5D - 3X.$$

14. Complete la demostración del Teorema 3, Pág. 150.

15. Para las matrices B y C del Ejercicio 12 calcule

a) La componente (1,2) de BC. b) La segunda fila de BC. c) La tercera columna de CB.

16. Demuestre el Teorema 4, Pág. 152.

17. ¿Cuáles de las siguientes matrices son invertibles y cuáles no?, y

diga por qué.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

18. Complete la demostración del Teorema 6, Pág. 158.

19. Demuestre que las propiedades planteadas en el Teorema 4, Pág. 152, para potencias enteras positivas, son válidas para cualquier potencia entera.

20. Demuestre que si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.

21. Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$, el i-ésimo y j-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, demuestre que $\mathbf{e}_i^T A$ es la i-ésima fila de A y que $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ es la (i,j)-ésima componente de A.

22. Dadas las matrices invertibles A y B y el vector $\mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

calcule

$$[AB + 3A]^T \left(\frac{1}{2} B^T A^T\right)^{-1} \mathbf{b}$$

23. Demuestre que $A^T A$ es una matriz simétrica para cualquier matriz A.

24. Complete la demostración del Teorema 8, Pág. 162.

25. ¿Cómo deben ser los elementos de una matriz diagonal para ser invertible? En este caso, ¿Cuál es la matriz inversa?

26. ¿Para qué valor o valores de α, A^{-1} existe?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & \alpha & -3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & \alpha \end{pmatrix}$.

27. Demuestre que si la matriz A es invertible y $AB = 0$, entonces $B = 0$.

28. Decida si cada una de las siguientes proposiciones es FALSA o VERDADERA y diga por qué.

a) Si las columnas de una matriz forman un conjunto de vectores *l.i.*, la matriz es invertible.

b) La suma de dos matrices invertibles es una matriz invertible.

c) Si la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es única, la matriz de coeficientes del sistema es invertible.

d) Cualquier escalar diferente de cero por una matriz invertible es invertible.

e) Si la suma de dos matrices es invertible, cada una de las matrices es invertible.

f) Si el producto de dos matrices es invertible, cada una de las matrices es invertible.

g) El producto de dos matrices cuadradas siempre es invertible.

h) Si el producto de dos matrices cuadradas es invertible, cada una de las matrices es invertible.

i) Si una matriz es invertible, cualquier matriz escalonada equivalente también es invertible.

j) Si una matriz escalonada equivalente de una matriz es invertible, la matriz también es invertible.

k) Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, la matriz A es invertible.

l) Si la matriz A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única.

m) Si la suma de las columnas de una matriz es igual al vector $\mathbf{0}$, la matriz no es invertible.

n) Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única y A es de orden n, la matriz A es invertible.

ñ) Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones, la matriz A no es invertible.

o) Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cualquier vector $\mathbf{b}$, la matriz A es invertible.

p) Para concluir que una matriz es invertible, es necesario calcular su inversa.

q) Si la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales es invertible, el sistema es inconsistente.

29. Realice los cálculos necesarios en la demostración del Teorema 9, Pág. 167.

30. Decimos que una matriz A cuadrada es *ortogonal*, si y sólo si, las columnas de la matriz son vectores unitarios y ortogonales entre si. Decida si cada una de las siguientes proposiciones es falsa o verdadera y diga por qué.

a) Si A es una matriz ortogonal, entonces $A^T A = I$.

b) Toda matriz ortogonal es invertible.

c) Si A es una matriz ortogonal, A^T también es ortogonal.

d) La matriz idéntica es ortogonal.

e) La inversa de una matriz ortogonal es su transpuesta.

f) Si A es una matriz ortogonal, la solución del sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

31. Para cada una de las operaciones elementales dadas, escriba la correspondiente matriz elemental de orden 3×3 y su matriz inversa.

a) $F_2 + \frac{3}{2}F_1 \to F_2$ b) $-5F_3 \to F_3$, c) $F_1 \leftrightarrow F_3$,

32. Dadas las siguientes matrices, identifique el tipo de matriz elemental, escriba la correspondiente operación elemental y su ma-

triz inversa.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

33. Decimos que una matriz A es *idempotente*, si y sólo si, $A^2 = A$ y decimos que una matriz A es *nilpotente*, si y sólo si, alguna potencia de la matriz es cero; es decir, A es nilpotente, si y sólo si, $A^k = O$ para algún valor de $k \in \mathbb{N}$. Decida si cada una de las siguientes proposiciones es falsa o verdadera y diga por qué.

    a) Toda matriz idempotente es invertible.

    b) Una matriz ortogonal simétrica es una matriz idempotente.

    c) Ninguna matriz nilpotente es invertible.

    d) La matriz idéntica es una matriz idempotente.

    e) Una matriz triangular con los elementos de la diagonal iguales a cero es una matriz nilpotente.

    f) Si $A^4 = O$, la matriz A es nilpotente.

    g) Si $A^4 = O$, la matriz A^2 es nilpotente.

    h) Si $A^4 = A^2$, la matriz A es idempotente.

    i) Si $A^4 = A^2$, la matriz A^2 es idempotente.

    j) Si A es idempotente, A^2 también es idempotente.

34. Dada una matriz A de orden $n \times n$, demuestre que si existe una matrix B tal que $AB = I$, entonces existe una matriz C tal que $CA = I$. [AYUDA: Observe que si la matriz B existe, es porque los sistemas de ecuaciones lineales $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, tienen solución, lo cual significa que existen matrices elementales $E_k E_{k-1} \cdots E_1$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$.]

35. Dada una matriz A de orden $n \times n$, demuestre que si existe una matrix B tal que $AB = I$, entonces $BA = I$. [AYUDA: Utilice el resultado anterior y demuestre que $C = B$.]

36. Al escalonar la matriz A, se aplicaron las operaciones elementales $F_2 + \frac{3}{2}F_1 \to F_2$, $F_3 + F_2 \to F_3$, y se obtuvo la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule la factorización LU de la matriz A.

b) Resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}^T = (-1 \;\; 0 \;\; 6)$.

c) Resuelva $A\mathbf{z} = \mathbf{d}$ para $\mathbf{d} = 3\mathbf{x}$.

d) Resuelva $A^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$ para $\mathbf{c}^T = (2 \;\; 0 \;\; -3)$.

e) ¿Existe $\det A$?

37. Resuelva el Ejercicio 30 b) de la Sección 1.6, Pág. 42.

38. Demuestre que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (A_{11} \; A_{12} \; A_{13})^T \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)^T, \end{aligned}$$

donde A es la matriz cuya primera fila es (1 2 3), la segunda fila es $\mathbf{u}$ y la tercera fila es $\mathbf{v}$.[11]

39. Al escalonar la matriz A, se aplicaron las operaciones elementales $F_2 + \frac{3}{2}F_1 \to F_2$, $F_3 + F_2 \to F_3$, y se obtuvo la matriz

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Existe la factorización LU de la matriz A?

b) Resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}^T = (-1 \;\; 0 \;\; 6)$.

c) Resuelva $A\mathbf{z} = \mathbf{d}$ para $\mathbf{d} = 3\mathbf{x}$.

d) Resuelva $A^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$ para $\mathbf{c}^T = (2 \;\; 0 \;\; -3)$.

e) Calcule $\det U$.

f) Calcule $\det A$.

[11] Como anotamos en el Capítulo 2, Pág. 105, esta expresión del producto vectorial usando cofactores es una buena nemotecnia de su definición

40. Si A y B son matrices 5×5 tales que $\det A = -3$ y $\det B = 1/2$, calcule, de ser posible,

    a) $\det(A^{-1})$. b) $\det(2B)$. c) $\det(AB)$.
    d) $\det(A+B)$. e) $\det(A^2)$. f) $\det(A^T)$.
    g) $\det[(3A)^{-1}]$. h) $\det[Adj(A)]$. i) $\det[(2B)^{-1}A(Adj(A))B^2]$.

41. Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ y $\det A = -\frac{1}{5}$, calcule, de ser posible, el determinante de las siguientes matrices

    a) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 5a_1 & a_2 & a_3 \\ 5b_1 & b_2 & b_3 \\ 5c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -2a_2 & -2b_2 & -2c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1-2a_1 & c_2-2a_2 & c_3-2a_3 \end{pmatrix}$

    e) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3c_1-2a_1 & 3c_2-2a_2 & 3c_3-2a_3 \end{pmatrix}$

    f) $\begin{pmatrix} a_1 & 3a_1+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3+3b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

    g) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    h) $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}$

    i) $\begin{pmatrix} a_1 & 5a_1-a_2 & a_3 \\ b_1 & 5b_1-b_2 & b_3 \\ c_1 & 5c_1-c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

42. *(Regla de Crammer)* Dado el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de tamaño $n \times n$, demuestre que

$$x_i \det A = \det A_i,$$

donde $\mathbf{x} = (x_i)$ y A_i es la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna i por el vector $\mathbf{b}$.[12]

[12]La Regla de Crammer permite *escribir* de una forma muy sencilla cada una de las componentes de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con solución única ($x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$), lo cual es bastante útil en muchos desarrollos teóricos [1]. También, permite *calcular* fácilmente

43. Al escalonar la matriz A, se aplicaron las operaciones elementales $F_1 \leftrightarrow F_3$, $F_2+2F_1 \to F_2$, $F_3-\frac{5}{2}F_1 \to F_3$, $5F_2 \to F_2$, y $F_3+\frac{10}{11}F_2 \to F_3$, y se obtuvo la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & -17/11 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $\det A$. b) ¿Existe A^{-1}?

c) ¿Existe la factorización LU de A? d) Calcule $\det Adj(A)$.

44. Conteste las mismas preguntas del ejercicio anterior sabiendo que además de las operaciones elementales dadas, la tercera operación elemental es

$$i)\ F_2 \leftrightarrow F_3 \qquad\qquad ii)\ -3F_2 \to F_2$$

45. Conteste FALSO o VERDADERO y diga por qué

a) Si las columnas de una matriz cuadrada son $l.i.$, el determinante de la matriz es diferente de cero.

b) Si la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuadrado es única, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema puede ser cero.

c) El determinante de $3A$ es 3 veces el determinante de A.

d) Si el determinante del producto de dos matrices cuadradas es cero, una de las matrices es cero.

e) Si el determinante del producto de dos matrices cuadradas es cero, el determinante de una de las matrices es cero.

f) La factorización LU de una matriz A requiere más operaciones que el método de la eliminación de Gauss para calcular una matriz escalonada equivalente a A.

g) Si una matriz es invertible, siempre es posible calcular su factorización LU.

h) Si la matriz A es invertible, la matriz A^4 también es invertible.

el determinante de una matriz de la forma A_i, una vez se ha calculado la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, puesto que del proceso de solución, es fácil obtener el determinante de A.

i) Si la matriz A es invertible, su matriz adjunta también es invertible.

j) Si la suma de las columnas de una matriz cuadrada es igual al vector $\mathbf{0}$, el determinante de la matriz es cero.

k) Si el determinante de una matriz es cero, al menos una columna de la matriz es combinación lineal de las otras.

l) Si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es cero, el sistema es inconsistente.

m) Toda matriz es el producto de matrices elementales.

n) Toda matriz cuadrada es el producto de matrices elementales.

ñ) Toda matriz elemental es invertible.

o) Si dos matrices tienen dos filas iguales, sus determinantes también son iguales.

p) Al pre-multiplicar una matriz por una matriz elemental, el determinante de la matriz no cambia.

46. Dados los números reales $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la matriz de la forma

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

se conoce como la matriz de *Vandermonde*. Para el caso particular $n = 2$, demuestre que V_2 es invertible, si y sólo si, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ son distintos [AYUDA: Demuestre que $\det V_2 = (\alpha 1 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)$].

47. Con los datos del Ejemplo 33, Pág. 195, calcule el producto de A por su adjunta y verifique el resultado del Teorema 17.

48. Demuestre que si $\det A = 0$, entonces $Adj(A)$ es la matriz cero o es una matriz cuyas $n - 1$ últimas filas son un múltiplo por escalar de la primera fila. [AYUDA: Demuestre que si A tiene una columna que es combinación lineal de las otras (sin pérdida de generalidad, suponga que es la última), todas las filas de $Adj(A)$ son múltiplos por escalar de un mismo vector. Luego, demuestre que si hay otra fila que es combinación lineal de las restantes, entonces $Adj(A) = \mathbf{0}$]

49. Demuestre que si A no es invertible, entonces $Adj(A)$ tampoco es invertible. [AYUDA: Utilice el resultado del ejercicio anterior o demuestre que si $Adj(A)$ es invertible, entonces $\det A \neq 0$.]

50. Para la matriz A del Ejemplo 34, Pág. 197, calcule las componentes $(2,3)$ y $(4,4)$ de A^{-1}.

51. Dadas una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n, definimos $tr(A)$, la traza de la matriz A, como la suma de los elementos de su diagonal; es decir, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Calcule la traza de $A + B$, λA, AB y A^2, siendo $B = (b_{ij})$ otra matriz de orden n.

Capítulo 4

ESPACIOS VECTORIALES

4.1. Introducción

Después de haber estudiado los vectores de $\mathbb{R}^n$ y las matrices, podemos notar cierta similitud entre las propiedades de sus operaciones básicas (suma y producto por escalar) lo cual no es casual. En realidad, los vectores de $\mathbb{R}^n$ y las matrices son dos ejemplos muy importantes de aquellos conjuntos en los cuales hay definidas dos operaciones como la suma y el producto por escalar con ciertas propiedades (como las probadas para los vectores de $\mathbb{R}^n$ y las matrices). En este capítulo, estudiaremos este tipo de conjuntos, a los cuales llamaremos Espacios Vectoriales, con el fin de analizar, en forma general, las consecuencias o ventajas de tener un conjunto con estas dos operaciones, sin tener que demostrarlas para cada caso particular. Centraremos nuestra atención en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita donde los escalares son números reales *(espacios vectoriales reales finitos)*, ya que estos nos permiten visualizar una amplia gama de conjuntos dotados con este tipo de operaciones como si fuera el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, para un n en particular.

Concretamente, en este capítulo, generalizaremos los conceptos de vector, combinación lineal, independencia lineal, conjuntos generados y generadores, norma, paralelismo y ortogonalidad, los cuales serán, en apariencia, iguales a los dados en el Capítulo 2. Con base en lo anterior, introduciremos los conceptos de base, de dimensión y de componentes de un vector en una base, lo cual nos permitirá analizar y hacer cálculos

sobre cualquier espacio vectorial real finito como si se tratara de $\mathbb{R}^n$, lo que resalta la importancia de conocer muy bien las propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^n$.

4.2. Definición y propiedades básicas

Empecemos listando las propiedades que deben cumplir los elementos de un conjunto dado, en el cual tenemos definidas dos operaciones que de forma genérica llamamos *suma* y *multiplicación por escalar*, para decir que dicho conjunto con las dos operaciones es un espacio vectorial.

Definición 1 [*Espacio vectorial*]. Sea V un conjunto no vacío en el cual se han definido dos operaciones, llamadas *suma* y *producto por escalar* (dados los elementos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de V y un escalar λ de $\mathbb{R}$, la suma de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ la denotamos $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y el producto por escalar de λ por $\mathbf{u}$ la denotamos $\lambda\mathbf{u}$). Si las siguientes propiedades o axiomas se satisfacen para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de V y para todo par de escalares α y β de $\mathbb{R}$, entonces se dice que V es un *espacio vectorial real* y sus elementos son llamados *vectores*.

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$. *Propiedad clausurativa para la suma.*
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$. *Propiedad conmutativa para la suma.*
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. *Propiedad asociativa para la suma.*
4. Existe un elemento $\mathbf{0} \in V$, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$. *Propiedad modulativa para la suma.*
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe un elemento $\mathbf{v} \in V$, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$. *Existencia del opuesto para la suma.*
6. $\alpha\mathbf{u} \in V$. *Propiedad clausurativa para el. producto por escalar*
7. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$. *Propiedad distributiva respecto la suma de vectores.*
8. $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$. *Propiedad distributiva respecto la suma de escalares.*

9. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Observemos que un espacio vectorial V se define como un conjunto no vacío en el cual están definidas dos operaciones *suma* y *producto por escalar* que satisfacen las 10 propiedades anteriores y que no se especifica la naturaleza de los elementos de V ni de las operaciones. Con frecuencia, las operaciones tendrán la naturaleza de la suma y producto por escalar que nos es familiar, pero en otros casos no. Como lo mencionamos en la introducción, ya tenemos dos ejemplos de espacio vectorial real, los vectores de $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto por escalar definidos en el Capítulo 2 y $\mathcal{M}_{m\times n}$, el conjunto de las matrices de un tamaño $m \times n$, con la suma y el producto por escalar definidas en el Capítulo 3.

En los otros ejemplos que presentaremos, debemos describir o caracterizar los elementos del conjunto, especificar las operaciones y verificar que se satisfagan los 10 axiomas de la Definición 1. De los axiomas, por razones que entenderemos más adelante, es conveniente primero verificar los Axiomas 1 y 6 (propiedades clausurativas), luego los Axiomas 4 y 5 (axiomas de existencia) y luego los demás que son propiedades relacionadas con las operaciones, más que con los elementos o vectores del espacio vectorial.

También debemos tener presente que, cuando los elementos neutros existen (Axiomas 4 y 5), estos son únicos como se pide demostrar en el Ejercicio 5. Además, dichos elementos neutros se pueden obtener como casos particulares del Axioma 6 ($0\mathbf{u}$ y $(-1)\mathbf{u}$) como se pide demostrar en el Ejercicio 6.

En los Capítulos 2 y 3, cuando definimos el producto por escalar en los vectores de $\mathbb{R}^n$ y en las matrices, nos referimos a un escalar como un número real, pero en realidad podríamos pensar en otros conjuntos de escalares, por ejemplo, los números racionales o los números complejos. En la mayoría de los casos, los escalares serán números reales (espacios vectoriales reales o simplemente espacios vectoriales), y, mientras no digamos lo contrario, así lo asumiremos.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{P}_2$ el conjunto de todos los polinomios de grado[1] menor o igual a 2. Es decir,

$$\mathcal{P}_2 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\},$$

y tomemos la suma y el producto por escalar de polinomios como se hace habitualmente; esto es, dados

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

dos polinomios de grado menor o igual a 2, y λ, un escalar, entonces

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \\ \lambda p(x) &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que al sumar dos polinomios de grado menor o igual a dos, obtenemos un polinomio cuyo grado es menor o igual a dos (Axioma 1) y que al multiplicar un polinomio de grado $k \leq 2$ por un escalar, obtenemos de nuevo un polinomio de grado k, a menos que el escalar por el que multipliquemos sea 0, en cuyo caso, el polinomio es $\mathbf{0}$ (el polinomio cuyos coeficientes son 0) (Axioma 6).

La existencia del vector nulo (Axioma 4) es clara, el vector nulo es el polinomio $\mathbf{0}$, y el opuesto para la suma de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es el polinomio cuyos coeficientes son los opuestos de los de $p(x)$, $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$ (Axioma 5). Los demás axiomas se verifican fácilmente. Verifiquemos el Axioma 9 y dejemos los demás como ejercicio para el lector (Ejercicio 3). Tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha[\beta p(x)] &= \alpha[\beta(a_0 + a_1x + a_2x^2)] \\ &= \alpha[\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2] \\ &= (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1x + (\alpha\beta)a_2x^2 \\ &= (\alpha\beta)(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= (\alpha\beta)p(x). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{P}_2$ es un espacio vectorial. □

Después de este ejemplo, podemos pensar en muchos más ejemplos similares: los polinomios de grado menor o igual a n, $\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$, con operaciones

[1] Recordemos que *el grado de un polinomio en x* es la máxima potencia de la variable x cuyo coeficiente es diferente de cero. Por definición, en este texto, el grado del polinomio cero es cero, aunque otros autores lo definen como infinito [10], [12] o dicen que no tiene grado [13].

suma y producto por escalar definidas similarmente, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ejemplo 2. Observemos que el conjunto de polinomios de grado igual a n, con n fijo y $n \geq 1$, con la suma y el producto por escalar definidas como antes, **no** es un espacio vectorial. En efecto, dicho conjunto no tiene el elemento neutro de la suma: el polinomio $\mathbf{0}$. (Aunque esto es suficiente para concluir que dicho conjunto no es un espacio vectorial, notemos que ni la suma ni el producto por escalar satisfacen la propiedad clausurativa). □

Ejemplo 3. Sea $\mathcal{F}[0, 1]$ el conjunto de todas funciones de valor real definidas en el intervalo $[0, 1]$. Si definimos suma y producto por escalar como lo hacemos habitualmente en cálculo: dadas f y g, dos funciones de valor real definidas en $[0; 1]$, tenemos que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\lambda f)(x) = \lambda[f(x)].$$

En otras palabras, la suma de dos funciones f y g es la función $(f+g)$ tal que el valor que toma en x es la suma de los valores que toman f y g en x. De manera similar, el producto por escalar de λ por f es la función λf, cuyo valor en x es λ veces el valor de f en x.

De la definición de las operaciones, es claro que los Axiomas 1 y 6 se satisfacen. Tomando $\mathbf{0}$, el elemento nulo, como la función cuyas imágenes son todas 0, se satisface el Axioma 4 y tomando $(-1)f$ como el opuesto de f se satisface el Axioma 5. La verificación de los demás axiomas es inmediata y se deja como ejercicio para el lector (Ejercicio 4). Así, $\mathcal{F}[0, 1]$ es un espacio vectorial. □

Es fácil ver que al tomar cualquier intervalo $[a; b]$ en lugar del intervalo $[0; 1]$ en el ejemplo anterior, tenemos otro gran número de ejemplos de espacio vectorial.

Ejemplo 4. Otro ejemplo sencillo de un conjunto que **no** es espacio vectorial real es $\mathbb{Z}$, los números enteros, con la suma y producto por escalar habitual, ya que el Axioma 6 no se satisface: al multiplicar un entero por un número real como $\sqrt{2}$, el resultado no es un número entero. □

Antes de analizar otro ejemplo de espacio vectorial, debemos observar que los axiomas que satisfacen los elementos de un espacio vectorial nos permiten demostrar, para cualquier espacio vectorial, propiedades

que demostramos directamente para $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$. En efecto, los axiomas dados en la Definición 1 nos permiten demostrar que el elemento neutro de la suma de vectores (Axioma 4) y el opuesto de un vector (Axioma 5) son únicos (Ejercicio 5), y que $0\mathbf{u}$ y $(-1)\mathbf{u}$ son el elemento neutro de la suma de vectores y el opuesto de $\mathbf{u}$, respectivamente (Ejercicio 6).

Ejemplo 5. Sea $\mathcal{H}$ el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación es $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$. Verifiquemos que $\mathcal{H}$, con la suma y el producto por escalar definidas en $\mathbb{R}^4$, es un espacio vectorial.

Si $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$ están en $\mathcal{H}$, tenemos que

$$2p_1 - p_2 + 3p_4 = 0 \quad \text{y} \quad 2q_1 - q_2 + 3q_4 = 0.$$

Los Axiomas 1 y 6 se satisfacen, ya que $(P+Q) = \begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \\ p_3+q_3 \\ p_4+q_4 \end{pmatrix}$ y $\lambda P = \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \\ \lambda p_4 \end{pmatrix}$ están en $\mathcal{H}$, puesto que

$$\begin{aligned} 2(p_1+q_1) - (p_2+q_2) + 3(p_4+q_4) &= (2p_1 - p_2 + 3p_4) \\ &\quad + (2q_1 - q_2 + 3q_4) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

y

$$2(\lambda p_1) - (\lambda p_2) + 3(\lambda p_4) = \lambda(2p_1 - p_2 + 3p_4) = \lambda 0 = 0.$$

Es claro que $\mathbf{0} \in \mathcal{H}$: $2\cdot 0 - 0 + 3\cdot 0 = 0$ y que $-P \in \mathcal{H}$: $2(-p_1) - (-p_2) + 3(-p_4) = -(2p_1 - p_2 + 3p_4) = -0 = 0$. Así que se satisfacen los Axiomas 4 y 5. Los demás axiomas se satisfacen claramente, ya que se satisfacen para los elementos de $\mathbb{R}^4$ (en particular, para los elementos de $\mathcal{H}$). Así que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial. □

Este último ejemplo es un caso especial, ya que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial contenido en otro espacio vectorial ($\mathbb{R}^4$). Los espacios vectoriales como $\mathcal{H}$ tienen un nombre especial, por su importancia tanto práctica como teórica.

4.3. Subespacio vectorial

Definición 2 [*Subespacio vectorial*]. Sea V un espacio vectorial y sea H un subconjunto de V. Si H es espacio vectorial con los mismos escalares y las mismas operaciones que V, decimos que H es un *subespacio* de V.

Una de las ventajas del concepto de subespacio es que, para demostrar que un subconjunto de un espacio vectorial es en si mismo un espacio vectorial, no es necesario mostrar que se satisfacen los 10 axiomas, como vimos en el Ejemplo 5; basta con verificar sólo dos de los 10 axiomas de la Definición 1, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 1 [*Caracterización de subespacio*].
Sea V un espacio vectorial y H un subconjunto no vacío de V. H es un subespacio vectorial de V, si y sólo si, los elementos de H satisfacen las propiedades clausurativas para la suma y el producto por escalar (Axiomas 1 y 6).

Demostración: Supongamos que H es un subespacio vectorial de V, entonces H es un espacio vectorial, lo que implica que H satisface los 10 axiomas de la definición, en particular, el 1 y el 6.
Supongamos ahora que H satisface los Axiomas 1 y 6. Teniendo en cuenta que los elementos de H también son elementos de V, H satisface también los Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 (en otras palabras, H hereda estas propiedades de V). Nos queda por verificar únicamente los Axiomas 4 y 5. Sea $\mathbf{u} \in H$. Por el Axioma 6, $\lambda\mathbf{u} \in H$ para todo λ, en particular para $\lambda = 0$ y para $\lambda = -1$. Así que el elemento nulo, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, y el opuesto de $\mathbf{u}$, $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, están en H. (Ver Ejercicio 6.) □

Así, en el Ejemplo 5, para probar que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial bastaba con observar que $\mathcal{H}$ es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y verificar sólo los Axiomas 1 y 6.

Ejemplo 6. Demostremos que $\mathcal{D}_n$, el conjunto de matrices diagonales de tamaño $n \times n$, es un espacio vectorial.

Sabiendo que $\mathcal{M}_{n\times n}$, el conjunto de las matrices de tamaño $n \times n$, es un espacio vectorial, que $\mathcal{D}_n$ es no vacío y que $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{M}_{n\times n}$, por el teorema anterior, basta con verificar los Axiomas 1 y 6. Pero claramente, al sumar dos matrices diagonales y al multiplicar una matriz diagonal por un escalar, obtenemos de nuevo matrices diagonales. Por

el Teorema 1, $\mathcal{D}_n$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}$ y por lo tanto, un espacio vectorial. □

Ejemplo 7. Demostremos que

$$H = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0 = 0,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

es un espacio vectorial.

Sabiendo que $\mathcal{P}_2$, el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2, es un espacio vectorial y que $H \subset \mathcal{P}_2$, sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ dos polinomios de H. Entonces $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$, y por tanto, $a_0 + b_0 = 0$ y $\lambda a_0 = 0$.

Así que

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \end{aligned}$$

y

$$\lambda p(x) = \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2$$

son polinomios de H; por el Teorema 1, H es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$ y por tanto, un espacio vectorial. □

Ejemplo 8. Veamos que $\mathcal{K} = \{(0\ \ y\ \ 0\ \ 1+y)^T : y \in \mathbb{R}\}$ **no** es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Basta con mostrar que uno de los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial no se cumple. Por ejemplo, el vector nulo $(0, 0, 0, 0)^T$ no se encuentra en $\mathcal{K}$ (falla el Axioma 4). □

Ejemplo 9. Demostremos que si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces $G = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un espacio vectorial.

Veamos que tanto la suma como el producto por escalar son cerradas en G. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de G y λ un número real. Por la definición de conjunto generado, Pág. 55, existen escalares α_i y β_i, para $i = 1,\ 2, \ldots\ k$ tales que

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k \ \text{ y } \ \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k) + (\beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\mathbf{u}_k \end{aligned}$$

y

$$\lambda\mathbf{u} = \lambda(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{u}_k) = (\lambda\alpha_1)\mathbf{u}_1+(\lambda\alpha_2)\mathbf{u}_2+\cdots+(\lambda\alpha_k)\mathbf{u}_k;$$

es decir, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in G$ y $\lambda\mathbf{u} \in G$. Por el Teorema 1, G es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y por tanto, un espacio vectorial. □

Ejemplo 10. Verifiquemos que $H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Observemos que $\begin{pmatrix} a \\ a-2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; por lo tanto, $H = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$; y por el resultado del ejemplo anterior, H es un espacio vectorial. □

4.4. Conceptos básicos

Como dijimos en la introducción, en esta sección, extenderemos los conceptos básicos de combinación lineal, conjunto generador, conjunto generado e independencia lineal que se estudiaron para vectores de $\mathbb{R}^n$ en el Capítulo 2, a los vectores abstractos (elementos de un espacio vectorial).

En un espacio vectorial, dado un conjunto de elementos del espacio, se puede construir un sin número de elementos del espacio al combinar las operaciones básicas, como lo planteamos en la siguiente definición.

Definición 3 [*Combinación lineal*][2]. Dados V, un espacio vectorial, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, vectores de V, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, escalares, decimos que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

es una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ se les llama *coeficientes* de la combinación lineal. Si todos los escalares son cero, diremos que tenemos la *combinación lineal trivial* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

[2]Aunque esta definición se puede generalizar a un conjunto infinito de vectores, para evitar complicaciones innecesarias en la notación, en este texto, nos limitaremos a conjuntos finitos; por ello, hacemos algunas demostraciones sólo para el caso que involucren combinaciones lineales de conjuntos finitos de vectores.

Ejemplo 11. Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$, el polinomio $-3-6x+x^2$ es una combinación lineal de los polinomios $1-2x+x^2$ y $3+x^2$, puesto que

$$-3-6x+x^2 = 3(1-2x+x^2) - 2(3+x^2).$$

Pero, el polinomio $-2x+x^2$ no es una combinación lineal de los polinomios mencionados, ya que no existen escalares α y β tales que

$$\begin{aligned} -2x+x^2 &= \alpha(1-2x+x^2)+\beta(3+x^2) \\ &= (\alpha+3\beta) - 2\alpha x + (\alpha+\beta)x^2, \end{aligned}$$

debido a que el sistema de ecuaciones lineales[3]

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha+\beta \\ -2 &= -2\alpha \\ 0 &= \alpha+3\beta \end{aligned}$$

es inconsistente. □

Al igual que con los vectores de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores tiene un nombre especial.

Definición 4 [*Conjunto generado y conjunto generador*]. Sean V, un espacio vectorial, y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de V. Definimos el *conjunto generado* por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, lo que representaremos por

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Además, si $H = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, diremos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un *conjunto generador* de H.

Ejemplo 12. Verifiquemos que $\{1-x,\ x^2,\ 1+x\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{P}_2$.
Debemos demostrar que cualquier polinomio de grado menor o igual a 2 es combinación lineal de los polinomios $1-x,\ x^2,\ 1+x$. En otras palabras, que dado un polinomio $a_0+a_1x+a_2x^2$, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tales que $a_0+a_1x+a_2x^2 = \lambda_1(1-x)+\lambda_2x^2+\lambda_3(1+x)$ o lo que es equivalente, que $a_0+a_1x+a_2x^2 = (\lambda_1+\lambda_3)+(\lambda_3-\lambda_1)x+\lambda_2x^2$.

[3]Recordemos que dos polinomios de $\mathcal{P}_n$ son iguales, si y sólo si, sus coeficientes correspondientes son iguales, es decir, $p(x) = q(x)$, si y sólo si, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots$, $a_n = b_n$, siendo $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots, +a_nx_n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots, +b_nx_n$.

Por la igualdad entre polinomios, el problema se reduce a determinar si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_1 &= \lambda_3 - \lambda_1 \\ a_2 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

tiene solución para todo $(a_0\ a_1\ a_2)^T$. Al escalonar la matriz de coeficientes del sistema, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como todas las filas tienen pivote, el sistema anterior siempre tiene solución, de donde podemos concluir que, efectivamente, cualquier polinomio de grado menor o igual a 2 es combinación lineal de los polinomios $1 - x,\ x^2,\ 1 + x$; es decir, conforman un conjunto generador de $\mathcal{P}_2$. □

Ejemplo 13. Determinemos si

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un conjunto generador de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, el espacio vectorial de las matrices de tamaño 2×2.

Veamos si cualquier matriz de tamaño 2×2 pertenece a $Gen\ M$. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$. Determinemos si existen escalares α, β, γ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta \\ \beta + \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

lo que es equivalente, por la igualdad de matrices, a determinar si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \gamma \\ b &= \beta \\ c &= \beta + \gamma \\ d &= \alpha \end{aligned}$$

tiene solución para todo $(a\ b\ c\ d)^T$. Como la matriz de coeficientes de este sistema y una forma escalonada equivalente son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos concluir que el sistema no siempre tiene solución y por tanto, no toda matriz de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ es una combinación lineal de las matrices de M (verifique que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una de ellas, Ejercicio 11). Por lo tanto, M no es un conjunto generador de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

□

Ejemplo 14. Determinemos si

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

genera a $\mathbb{R}^3$.

Veamos si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ pertenece a $Gen\ S$. Sea

$$(x_1\ x_2\ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$$

y verifiquemos si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tales que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a determinar si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ x_2 &= \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ x_3 &= \lambda_3 + 3\lambda_4 \end{aligned}$$

tiene solución para todo $(x_1\ x_2\ x_3)^T$. Como la matriz de coeficientes de este sistema, que coincide con una de sus formas escalonadas

equivalentes, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

podemos concluir, que todo vector de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores de S. Por tanto, S es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. □

En general, el conjunto generado por cualquier subconjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial es un subespacio vectorial (y por tanto, un espacio vectorial como vimos en el Ejemplo 9, Pág. 218); además, es el subespacio más pequeño[4] que contiene el subconjunto de vectores, como lo planteamos en el siguiente teorema.

Teorema 2 [*Subespacio mínimo que contiene un subconjunto*].
Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces

1. *Gen* S es un subespacio de V.
2. Si H es otro subespacio de V que contiene a S, entonces H contiene a *Gen* S.

Demostración:

1. Aunque el teorema es válido para situaciones más generales, en el Ejemplo 9, Pág. 218, demostramos que *Gen* S es un subespacio de V, cuando S es un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. La demostración es idéntica cuando S es un conjunto finito de vectores de cualquier espacio vectorial.

2. Probemos que *Gen* S es el subespacio *más pequeño* que contiene a S. Sea H un subespacio vectorial de V tal que $S \subseteq H$. Como los elementos de H satisfacen las propiedades clausurativas para la suma y el producto por escalar, cualquier combinación lineal de los elementos de S pertenecen a H; es decir, *Gen* $S \subseteq H$. (H es un subespacio *mas grande* que *Gen* S). □

Uno de los conceptos más importantes del álgebra lineal es el de dependencia lineal de un conjunto de elementos de un espacio vectorial, el cual está íntimamente relacionado con la forma de escribir el vector **0** como combinación lineal de estos elementos, como lo expresamos en la siguiente definición.

[4] *Más pequeño* en el sentido de contenencia de conjuntos.

Definición 5 [*Conjunto de vectores linealmente dependiente*]. Sea V un espacio vectorial. Diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ es *linealmente dependiente*(*l.d.*), si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, **no todos cero**, tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

En caso contrario, diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (*l.i.*); es decir, si siempre que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$; en otras palabras, un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es *linealmente independiente*, si la única combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ igual a cero es la combinación lineal trivial.

Ejemplo 15. Determinemos si el conjunto de polinomios $S = \{1 - x + x^2, 1 + x - x^2, 1 + x + x^2\}$ es *l.d.*
Encontremos los escalares $\lambda_1,\ \lambda_2$ y λ_3 tales que

$$\begin{aligned} \lambda_1(1 - x + x^2) + \lambda_2(1 + x - x^2) + \lambda_3(1 + x + x^2) &= \mathbf{0}, \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)x^2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

o lo que es equivalente, resolvamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

cuya matriz de coeficientes y una forma escalonada equivalente son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente, de donde concluimos que no hay variables libres en el sistema (4.1); es decir, que el sistema homogéneo (4.1) tiene solución única (el vector nulo) y por tanto, S es un conjunto de vectores *l.i.*

□

Ejemplo 16. Determinemos si

$$T = \left\{1 - x,\ 2x - x^2,\ -1 + 2x^2,\ 1 + x + x^2\right\}$$

es un conjunto de vectores *l.i.*

Veamos si existen únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, tales que

$$\begin{aligned} \alpha_1(1-x) + \alpha_2(2x-x^2) + \alpha_3(-1+2x^2) + \alpha_4(1+x+x^2) &= \mathbf{0}, \\ (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4)x + (-\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4)x^2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a verificar si existe solución única para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

cuya matriz de coeficientes y una forma escalonada equivalente son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. La segunda matriz indica que, en el sistema (4.2), α_4 es una variable libre; es decir, que dicho sistema tiene infinitas soluciones y por tanto, T no es un conjunto de vectores $l.i.$ □

Los conjuntos linealmente dependientes y los conjuntos linealmente independientes tiene propiedades importantes; algunas de ellas los caracterizan, como lo planteamos en el siguiente teorema.

Teorema 3 [*Propiedades básicas de independencia y dependencia lineal*].
Dado un espacio vectorial V y S un subconjunto de V,

1. Si S contiene el vector $\mathbf{0}$, S es un conjunto linealmente dependiente.
2. Si S consta de **dos** elementos, S es linealmente dependiente, si y sólo si, uno de ellos es un múltiplo por escalar del otro[5].
3. Si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, S es linealmente dependiente.
4. Si S es linealmente independiente, cualquier subconjunto de S es también linealmente independiente.

[5]Observemos que este resultado no es válido si S consta de 3 o más elementos. Por su aplicabilidad, se enuncia este resultado, pero es un caso particular del Teorema 5.

Demostración: Nuevamente, aunque los Resultados 1, 3 y 4 son válidos en general, demostremos los dos últimos resultados cuando S es un conjunto finito.

1. Dado que $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo λ, el resultado es inmediato.

2. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Si S es *l.d.*, entonces existen escalares λ_1 y λ_2 tales que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, donde al menos uno de los dos escalares es diferente de cero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_1 \neq 0$, así que $\mathbf{v}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v}_2$. Ahora, si $\mathbf{v}_1 = \mu\mathbf{v}_2$, entonces podemos obtener una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ igual $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 - \mu\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, que no es la trivial; por tanto, S es un conjunto de vectores *l.d.*

3. Sea $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto de

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

   Si T es *l.d.*, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ no todos 0, tales que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Así que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ y por tanto S es *l.d.*

4. Sea $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto de

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

   Si S es *l.i.* entonces $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k + \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. En particular, si $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, entonces $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ lo que implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$; por lo tanto T es un conjunto *l.i.*.

□

Establezcamos ahora algunos resultados que relacionan los conceptos de conjunto generador, conjunto generado y conjunto de vectores linealmente independiente.

Teorema 4 [*Otras propiedades de un conjunto linealmente independiente*].
Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores *l.i.* de un espacio vectorial V.

1. Si $\mathbf{v} \in \mathit{Gen}\ S$, entonces $\mathbf{v}$ se escribe de manera **única** como combinación lineal de los vectores de S. En otras palabras, si

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{v}_n \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1+\mu_2\mathbf{v}_2+\ldots+\mu_n\mathbf{v}_n,$$

entonces

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_n = \mu_n.$$

2. $\mathbf{v} \notin \mathit{Gen}\ S$, si y sólo si, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es $l.i.$

Demostración:

1. Supongamos que existen dos combinaciones lineales de $\mathbf{v} \in \mathit{Gen}\ S$; es decir, existen escalares $\lambda_1, \ldots\ \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots\ \mu_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n.$$

Restando estas dos ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) - (\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Como S es un conjunto de vectores $l.i.$, entonces

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \ldots = \lambda_n - \mu_n = 0,$$

es decir,

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_n = \mu_n.$$

2. Si $\mathbf{v} \notin \mathit{Gen}\ S$, entonces $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, puesto que $\mathit{Gen}\ S$ es un espacio vectorial. Razonando por contradicción, supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores $l.d.$ Por definición, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_0$, no todos iguales a cero, tales que

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n + \lambda_0\mathbf{v},$$

con $\lambda_0 \neq 0$, puesto que si $\lambda_0 = 0$, implicaría que todos los demás escalares también serían cero ya que S es un conjunto $l.i.$ Entonces, podemos despejar $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\mathbf{v}_n.$$

Esto significa que $\mathbf{v} \in \mathit{Gen}\ S$, lo cual contradice nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores $l.i.$

De otro lado, si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*, ninguno de los vectores es combinación lineal del resto de vectores. En particular, $\mathbf{v}$ no es combinación lineal del conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$; es decir, $\mathbf{v} \notin Gen\ S$. □

Observemos que cuando tenemos un conjunto de vectores *l.d.*, existe por lo menos un elemento del conjunto que "sobra", en el sentido que dicho elemento es una combinación lineal de los demás y que el espacio generado por el conjunto, con este elemento o sin él, es el mismo. En el siguiente teorema, resaltamos estas dos características de los conjuntos de vectores *l.d.*, que por lo anterior, le dan significado a su nombre.

Teorema 5 [*Otras propiedades de un conjunto linealmente dependiente*].
Sean V un espacio vectorial y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores de V. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. El conjunto S es *l.d.*
2. Existe $\mathbf{v}_i \in S$ tal que $\mathbf{v}_i$ es combinación lineal del resto de vectores de S.
3. Existe $\mathbf{v}_i \in S$ tal que $Gen\ S = Gen\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1},\ \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Demostración: Demostremos primero que la Proposición 1 implica la Proposición 2. Supongamos que S es un conjunto de vectores *l.d.* Entonces existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos iguales a cero, tales que

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Sea $\lambda_i \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_i}\mathbf{v}_1 - \ldots - \tfrac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\mathbf{v}_{i-1} - \tfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\mathbf{v}_{i+1} - \ldots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda_i}\mathbf{v}_n \\ &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \beta_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n\ , \end{aligned} \tag{4.3}$$

es decir, $\mathbf{v}_i$ es una combinación lineal del resto de vectores de S.

Veamos ahora que la Proposición 2 implica la Proposición 3. Supongamos que existe $\mathbf{v}_i \in S$, tal que $\mathbf{v}_i$ es combinación lineal del resto de vectores de S. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el vector que es combinación lineal del resto de vectores de S es $\mathbf{v}_1$; es decir, podemos suponer que

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n. \tag{4.4}$$

Llamemos $S_1 = \{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Es obvio que $Gen(S_1) \subseteq Gen(S)$. Demostremos que $Gen(S) \subseteq Gen(S_1)$, para concluir que $Gen(S_1) = Gen(S)$. Sea $\mathbf{v} \in Gen(S)$, por lo tanto, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Reemplazando (4.4) en la última expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1(\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \\ &= (\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\lambda_1\alpha_n + \lambda_n)\mathbf{v}_n \ , \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathbf{v} \in Gen(S_1)$.

Por último, veamos que la Proposición 3 implica la Proposición 1. Supongamos que existe $\mathbf{v}_i \in S$, tal que

$$Gen\ S = Gen\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1},\ \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Gen\ S = Gen\ S_1$, donde $S_1 = \{\mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$. Como $\mathbf{v}_1 \in S$, entonces $\mathbf{v}_1 \in Gen(S) = Gen(S_1)$, así que existen $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ tales que $\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. De esta igualdad, tenemos que

$$\mathbf{v}_1 - \alpha_2\mathbf{v}_2 - \ldots - \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

la cual es una combinación lineal no trivial igual a $\mathbf{0}$, de donde concluimos que S es *l.d.*

□

Ejemplo 17. Determinemos si los siguientes conjuntos son *l.i.* o *l.d.*

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $C = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, 3\mathbf{u}\} \subset \mathbb{R}^9$

d) Dos polinomios del conjunto S del Ejemplo 15.

Además, determinemos

i) Si hay un vector (polinomio) en el conjunto S del Ejemplo 15 que sea combinación lineal de los otros vectores del conjunto.

ii) La misma pregunta para el conjunto T del Ejemplo 16.

iii) Para un vector $\mathbf{p} \in Gen\ S$ del Ejemplo 15, ¿Cuántas combinaciones lineales de los vectores de S iguales a $\mathbf{p}$ hay?

iv) Para un vector $\mathbf{q} \in Gen\ T$ del Ejemplo 16, ¿Cuántas combinaciones lineales de los vectores de T iguales a $\mathbf{q}$ hay?

a) Puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

por el teorema anterior, (2. implica 1.), concluimos que el conjunto A es linealmente dependiente.

b) Como el conjunto B contiene el vector $\mathbf{0}$, por el Resultado 1 del Teorema 3, este conjunto es $l.d.$

c) Como el conjunto C tiene como subconjunto a $\{\mathbf{u}, 3\mathbf{u}\}$, el cual por el Resultado 2 del Teorema 3 es $l.d.$, por el Resultado 3 del mismo teorema, el conjunto C es $l.d.$

d) Como el conjunto S es $l.i$, por el Resultado 4 del Teorema 3, este conjunto es $l.i.$

i) Como el conjunto S es $l.i.$, por el Resultado 2 del Teorema 5, ninguno de sus elementos es combinación lineal de los otros; por lo tanto, la respuesta es no hay un polinomio que pertenezca a S que sea combinación lineal de los otros polinomios de S.

ii) Como el conjunto T es $l.d.$, por el Resultado 2 del Teorema 5, al menos uno de sus elementos es combinación lineal de los otros; por lo tanto, la respuesta es sí hay un polinomio que pertenece a T que es combinación lineal de los otros polinomios de T.

iii) Como el conjunto S es $l.i.$, por el Resultado 1 del Teorema 4, existe una única combinación lineal de los vectores de S igual a $\mathbf{p}$.

iv) Como el conjunto T es $l.d.$, por el Resultado 1 del Teorema 4, existen infinitas combinaciones lineales de los vectores de T iguales a $\mathbf{q}$.

□

4.5. Bases y dimensión

En esta sección, presentaremos un concepto fundamental en el análisis de la estructura de espacio vectorial. Se trata del concepto de base, el cual define un conjunto de vectores que permite describir eficientemente[6] el espacio vectorial y sus propiedades.

Definición 6 [*Base*]. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial V. Diremos que $\mathcal{B}$ es una *base* de V, si y sólo si, el conjunto $\mathcal{B}$ satisface las siguientes condiciones

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.
2. $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V.

Ejemplo 18. Demostremos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Cualquier combinación lineal de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ igual a un vector dado, nos conduce a un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es la matriz idéntica de tamaño $n \times n$, de donde podemos concluir que la única combinación lineal igual al vector $\mathbf{0}$ es la trivial ($\mathcal{B}$ es un conjunto *l.i.*) y que cualquier vector se puede expresar como una única combinación lineal de ellos ($\mathcal{B}$ genera a $\mathbb{R}^n$). Por tanto, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. A esta base la llamamos *base canónica* o *base estándar* de $\mathbb{R}^n$. □

Ejemplo 19. Demostremos que $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathcal{P}_n$.

Es fácil ver que al establecer una ecuación en $\mathcal{P}_n$, en la que $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, un polinomio de grado menor o igual a n, es una combinación lineal de $1, x, \ldots, x^n$ con los escalares de la combinación lineal como incógnitas; es decir,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \lambda_0 1 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n,$$

por la igualdad de polinomios, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es la matriz idéntica de tamaño $(n+1) \times (n+1)$. Así, podemos concluir que cualquier polinomio de grado menor o igual a n se puede expresar de manera única como

[6] La propiedad de eficiencia de una base de un espacio vectorial está relacionada con el hecho que es un conjunto óptimo (suficiente y necesario) para construir todo el espacio, expresando todos y cada uno de sus elementos de forma única.

combinación lineal de los polinomios $1, x, \ldots, x^n$, incluyendo el polinomio $\mathbf{0}$. Por tanto, $\{1, x, \ldots, x^n\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{P}_n$ y además es *l.i.*, así que es una base de $\mathcal{P}_n$. A esta base la llamamos *base canónica* o *base estándar* de $\mathcal{P}_n$. □

Ejemplo 20. Demostremos que

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\},$$

donde E_{ij} es la matriz $m \times n$ con todas sus componentes 0, a excepción de la componente (i, j), que es 1, es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}$, el espacio vectorial de las matrices de tamaño $m \times n$.

De nuevo, tenemos que al establecer una ecuación en $\mathcal{M}_{m\times n}$, en la que una matriz $m \times n$ es una combinación lineal de E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n},..., E_{m1}, ..., E_{mn}, con los escalares de la combinación lineal como incógnitas, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es la matriz idéntica de tamaño $mn \times mn$. Así, podemos concluir que cualquier matriz de tamaño $m \times n$ se puede expresar de manera única como combinación lineal de las matrices E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{m1}, ..., E_{mn}, incluyendo la matriz nula. Por tanto,

$$\{E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$$

es un conjunto generador de $\mathcal{M}_{m\times n}$ y además es *l.i.*, así que es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}$. A esta base la llamamos *base canónica* o *base estándar* de $\mathcal{M}_{m\times n}$. □

Ejemplo 21. Demostremos que $\mathcal{B} = \{1 - x,\ 1 + x,\ x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$.

Dado un polinomio arbitrario de $\mathcal{P}_2$, $a_0 + a_1x + a_2x^2$, al establecer la ecuación

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 &= \lambda_1(1 - x) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3x^2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) + (-\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_3x^2, \end{aligned}$$

por la igualdad de polinomios, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_1 &= -\lambda_1 + \lambda_2 \\ a_2 &= \lambda_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como la matriz de coeficientes de este sistema y una forma escalonada equivalente son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

podemos concluir que el sistema (4.5) tiene solución (única) para todo $(a_0\ a_1\ a_2)^T$, así que $\{1-x, 1+x, x^2\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{P}_2$ y, además, es $l.i.$, ya que el sistema homogéneo asociado a (4.5) también tiene solución única, la trivial; por lo tanto, es una base de $\mathcal{P}_2$.

□

Ejemplo 22. Determinemos si $\mathcal{B} = \{1 - x + 3x^2,\ 1 - x,\ x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$.

Dado que $1 - x + 3x^2 = (1 - x) + 3(x^2)$, por el Teorema 5, $\mathcal{B}$ es un conjunto $l.d.$, por tanto, $\mathcal{B}$ no es una base.

□

Ejemplo 23. Determinemos si

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz arbitraria de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y veamos si existen escalares α, β, γ tales que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -2\beta + 2\gamma \\ \beta + 3\gamma & -\alpha + \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a determinar si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \gamma \\ b &= -2\beta + 2\gamma \\ c &= \beta + 3\gamma \\ d &= -\alpha + \gamma \end{aligned} \tag{4.6}$$

tiene solución para todo $(a\ b\ c\ d)^T$. Como la matriz de coeficientes de este sistema y una forma escalonada equivalente son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema (4.6) no tiene solución para toda matriz de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ (por ejemplo, para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, el sistema (4.6) no tiene solución), de donde concluimos que S no genera a $\mathcal{M}_{2\times 2}$, por lo tanto, S no es una base de este espacio.

□

Como lo pudimos apreciar en los ejemplos anteriores, cada espacio vectorial tiene al menos una base. Aunque la demostración de este resultado está fuera de nuestro alcance, lo enunciamos por su importancia dentro del desarrollo teórico y práctico del Álgebra Lineal.

Teorema 6 [*Existencia de una base*][11].
Todo espacio vectorial, excepto el espacio vectorial trivial $V = \{\mathbf{0}\}$, tiene al menos una base.

En los ejemplos, también pudimos observar que al plantear las ecuaciones que nos permiten concluir que un conjunto de vectores es una base, siempre llegamos a un sistema de ecuaciones lineales con solución única, lo que se puede enunciar como el siguiente teorema.

Teorema 7 [*Caracterización de una base*].
Un subconjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V, si y sólo si, para cada vector $\mathbf{v}$ de V existen escalares **únicos** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Demostración: Si $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces $Gen\ \mathcal{B} = V$ y $\mathcal{B}$ es un conjunto *l.i.* Por el Teorema 4, todo vector de V se puede escribir como una combinación lineal única de los vectores de $\mathcal{B}$.

Recíprocamente, si suponemos que todo vector de V es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ genera a V. Y, si las combinaciones lineales son únicas, la combinación lineal igual a $\mathbf{0}$ es la trivial,

por tanto $\mathcal{B}$ es $l.i.$ Así que si todo vector se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ es una base de V.

□

Teniendo en cuenta los Ejemplos 19 y 21, observamos que el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ tiene al menos dos bases con algo en común: el número de elementos, lo cual no es casual. Para probar que todas las bases de un mismo Espacio Vectorial tienen el mismo número de vectores, primero observemos que las bases deben contener a lo más igual número de elementos que un conjunto generador, ya que no existe un conjunto linealmente independiente con más elementos que un conjunto generador, lo que demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 8 [*Propiedad maximal de un conjunto l.i.*]
Si el espacio vectorial V tiene un conjunto generador de n elementos, entonces cualquier subconjunto de V con más de n elementos es $l.d.$ En otras palabras, cualquier conjunto de vectores $l.i.$ de V tiene a lo sumo el número de vectores de un conjunto generador.

Demostración: Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto generador de V y $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset V$ un conjunto de vectores $l.i.$ Veamos que $m \leq n$. Construyamos el conjunto $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. S_1 es $l.d.$, ya que S es un conjunto generador de V y $\mathbf{u}_1 \in V$, entonces existe un $\mathbf{v}_i$ que es combinación lineal del resto de vectores de S_1 (por ser $\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n \neq 0$, existe al menos un $\lambda_i \neq 0$). Sin pérdida de generalidad (reenumerando, si es necesario), supongamos que $i = 1$ y definamos $S_1' = S_1 - \{\mathbf{v}_1\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\}$. Por el Teorema 5, tenemos que $V = Gen\ S_1 = Gen\ S_1'$. Construyamos $S_2 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. S_2 es $l.d.$, ya que S_1' es un conjunto generador de V y $\mathbf{u}_2 \in V$, entonces existe un $\mathbf{v}_i$ que es combinación lineal del resto de vectores de S_2 (por ser $\mathbf{u}_2 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n \neq 0$ y T un conjunto $l.i.$, existe al menos un $\lambda_i \neq 0$). Sin pérdida de generalidad (reenumerando, si es necesario), supongamos que $i = 2$ y definamos $S_2' = S_2 - \{\mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_3,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\}$. Por el Teorema 5, tenemos que $V = Gen\ S_2 = Gen\ S_2'$.

Repitiendo la misma argumentación, podemos construir el conjunto $S_m = \{\mathbf{u}_m,\ \ldots,\ \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_m,\ , \ldots, \mathbf{v}_n\}$ el cual es $l.d.$, para lo cual se requiere que $m \leq n$ porque si $m > n$, tendríamos que $S_{n+1} = \{\mathbf{u}_{n+1},\ \ldots,\ \mathbf{u}_1\}$ es un conjunto de vectores $l.d.$, lo cual es una contradicción, puesto que $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ es un conjunto de vectores $l.i.$ (ver Resultado 4 del Teorema 3) □

Ahora, podemos probar la observación que hicimos referente a los Ejemplos 19 y 21, la cual es muy importante, ya que nos permitirá definir la dimensión de un espacio vectorial.

Teorema 9 [*Característica común de las bases*].
Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual número de elementos.

Demostración: Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ bases de V. Así que $\mathcal{B}_1$ es un conjunto generador de V y $\mathcal{B}_2$ es *l.i.*, entonces, por el teorema anterior, $m \leq n$. Pero de otro lado, $\mathcal{B}_2$ es conjunto generador de V y $\mathcal{B}_1$ es *l.i.*, entonces, por el teorema anterior, $n \leq m$. Por tanto, $n = m$.

□

Con base en este importante resultado, podemos definir una característica muy especial de cada espacio vectorial.

Definición 7[*Dimensión*]. Dado V, un espacio vectorial no trivial, decimos que $dim(V)$, la dimensión de V, es el número de elementos de una base de V; es decir, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, decimos que

$$dim(V) = n,$$

En caso que $V = \{\mathbf{0}\}$, espacio vectorial que no tiene base, por conveniencia, decimos que el espacio vectorial tiene dimensión 0, y en caso que un espacio vectorial no tenga una base finita, diremos que es de dimensión infinita.

Así, de los Ejemplos 18, 19 y 20, tenemos que $dim(\mathbb{R}^n) = n$, $dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$ y $dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = mn$. De otro lado, $\mathcal{P}_\infty$, el espacio vectorial de todos los polinomios, es de dimensión infinita. Veamos otros ejemplos menos triviales.

Ejemplo 24. Determinemos la dimensión de $V = Gen\{1-x, 1+x, x\}$. Puesto que $x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$, tenemos que $V = Gen\{1-x, 1+x\} = Gen\{1-x, 1+x, x\}$. Ahora, puesto que $1+x$ y $1-x$ no son múltiplos por escalar entre si, el conjunto formado por ellos es *l.i.*, por tanto, $\{1-x, 1+x\}$ es una base de V, lo que implica que la dimensión de V es 2.

□

Ejemplo 25. Demostremos que un plano en $\mathbb{R}^n$ que contenga el origen es un espacio vectorial de dimensión 2.

Sea $\mathcal{P}$ un plano de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen. Si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son los vectores directores de $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y por tanto, $\mathcal{P}$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$ (ver Ejemplo 9, Pág. 218). Pero, como por definición de plano, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ no son paralelos, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman un conjunto *l.i.*, así que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de $\mathcal{P}$ y por tanto, su dimensión es 2.

□

Conociendo la dimensión de un espacio vectorial, podemos determinar el mínimo número de elementos de un conjunto generador y el máximo número de elementos de un conjunto *l.i.*, como lo expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 10 [*Propiedad maximal y minimal de un subconjunto de vectores*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V con m elementos.

1. Si S es *l.i.*, entonces $m \leq n$.
2. Si S genera a V, entonces $m \geq n$.

Demostración:

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces $\mathcal{B}$ tiene n elementos y genera a V. Por el Teorema 8, cualquier conjunto de vectores *l.i.* tiene a lo sumo n elementos, así que si S es *l.i.*, $m \leq n$.
2. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces $\mathcal{B}$ tiene n elementos y es un conjunto *l.i.* Así que si S genera a V, por el Teorema 8, $m \geq n$.

□

Ejemplo 26. Sea S un conjunto de k matrices de tamaño $m \times n$, entonces si S es *l.i.*, $k \leq mn$ y si S genera a $\mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $k \geq mn$, ya que $dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = mn$.

□

Observemos que el Teorema 10 nos da condiciones **necesarias**, muy fáciles de verificar, para que un conjunto de vectores sea generador o linealmente independiente cuando conocemos la dimensión del espacio vectorial, lo cual nos permite determinar cuando un conjunto de vectores **no** es generador o **no** es *l.i.*, simplemente comparando el número de vectores del conjunto con la dimensión del respectivo espacio vectorial. Así por ejemplo, sabiendo que $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$, el conjunto M del

Ejemplo 13 **no** genera a $\mathcal{M}_{2\times 2}$, por tener sólo 3 matrices. Igualmente, sabiendo que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, el conjunto S del Ejemplo 14 **no** es *l.i.*, por tener 4 vectores. Lo mismo sucede con el conjunto T del Ejemplo 16, el cual tiene 4 polinomios y $dim(\mathcal{P}_2) = 3$.

Con este teorema, también tenemos que, conociendo n, la dimensión de un espacio vectorial, basta que un subconjunto del espacio con n elementos satisfaga una de las dos condiciones de la definición de base, para concluir que el subconjunto es una base del espacio vectorial.

Teorema 11 [*Propiedad maximal y minimal de una base*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V con n elementos.

1. Si S es *l.i.*, entonces S es una base de V.
2. Si S genera a V, entonces S es una base de V.

Demostración:

1. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores *l.i.* de V. Si S no genera a V, existe $\mathbf{u}$ en V que no se encuentra en $Gen\ S$ y por el Teorema 4, Pág. 226, el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $n+1$ elementos es *l.i.*, lo que nos lleva a una contradicción, ya que, por el Teorema 10, tendríamos que $(n+1) \leq n$, de donde concluimos que S genera a V y por tanto, es una base de V.

2. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto generador de V. Si S es *l.d.*, por el Teorema 5, Pág. 228, existe un vector $\mathbf{v}_i$ que es combinación lineal de los otros vectores de S, así que si $S_1 = S - \{v_i\}$, $Gen\ S = Gen\ S_1$, pero S_1 contiene $n-1$ elementos, lo que contradice la parte 2 del Teorema 10. Así que S es *l.i.*, lo que implica que S es una base de V.

□

Este teorema nos muestra otra ventaja importante de conocer la dimensión de un espacio vectorial cuando queremos determinar si un conjunto dado es una base de él. Así por ejemplo, conociendo que $dim(\mathcal{P}_2) = 3$, el resultado obtenido en el Ejemplo 12 nos permite afirmar que el conjunto $\{1-x,\ x^2,\ 1+x\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$.

Para enfatizar la propiedad de eficiencia de una base, tenemos que, dado un conjunto generador pero *l.d.* de un espacio vectorial V, podemos quitarle elementos adecuadamente hasta reducirlo a un conjunto *l.i.* y por tanto, en base de V. Y si tenemos un conjunto de vectores

l.i. de V, podemos agregarle vectores adecuadamente hasta convertirlo en generador de V y por tanto, en base de V, como lo demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 12 [*Construcción de una base a partir de un subconjunto de vectores*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y S un subconjunto de V con m elementos.

1. Si S es *l.i.*, podemos encontrar un conjunto T que **contiene** a S y es una base de V.
2. Si $V = Gen\ S$, entonces podemos encontrar un conjunto T **contenido** en S que es una base de V.

Demostración:

1. Supongamos que S es *l.i.* Si S genera a V, $T = S$ es una base de V. Si S no genera a V, existe un elemento $\mathbf{u}_1 \in V$ tal que $\mathbf{u}_1 \notin Gen\ S$. Construyamos $S_1 = S \cup \{\mathbf{u}_1\}$; si S_1 genera a V, $T = S_1$ es una base de V ya que, por el Teorema 4, es *l.i.*; sino, existe un elemento $\mathbf{u}_2 \in V$ tal que $\mathbf{u}_2 \notin Gen\ S_1$. Construyamos a $S_2 = S_1 \cup \{\mathbf{u}_2\}$, si S_2 genera a V, $T = S_2$ es una base de V ya que, por el Teorema 4, es *l.i.*; sino, podemos continuar este procedimiento hasta encontrar un conjunto S_k que contiene a S, es *l.i.* y genera a V. Por tanto, podemos encontrar un conjunto $T = S_k$ (por el Teorema 10, $k = n - m$) que contiene a S y es una base de V.

2. Supongamos que $V = Gen\ S$. Si S es *l.i.*, entonces S es una base de V. Si S es *l.d.*, entonces existe un vector $\mathbf{u}_1$ de S que es combinación lineal de los otros vectores de S de tal manera que si $S_1 = S - \{\mathbf{u}_1\}$, $Gen\ S = Gen\ S_1$. Si S_1 es *l.i.*, entonces S_1 es una base de V. Si S_1 es *l.d.*, entonces existe un vector $\mathbf{u}_2$ de S_1 que es combinación lineal de los otros vectores de S_1 de tal manera que si $S_2 = S_1 - \{\mathbf{u}_2\}$, $Gen\ S_2 = Gen\ S_1 = Gen\ S$ y continuamos este procedimiento hasta obtener un conjunto $T = S_k$ (por el Teorema 10, $k = m - n$) que es *l.i.*, tal que $Gen\ S_k = Gen\ S$. Este conjunto $T = S_k$ es una base de V.

□

Ejemplo 27. Encontremos una base de $\mathcal{P}_2$ que contenga a $S = \{1 - x^2, 1 + 2x\}$.

Como S es *l.i.*, basta encontrar un vector de $\mathcal{P}_2$ que no esté en *Gen S*. Así, tendríamos un conjunto de 3 vectores *l.i.*, que, por el Teorema 11, sería base de V.

Sabiendo que $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$, tomemos un vector de $\mathcal{B}$, por ejemplo el 1, y veamos si está en *Gen S*. Es fácil ver que $1 \notin Gen\ S$, pues no existen escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1(1 - x^2) + \lambda_2(1 + 2x) = 1$. Así que $S_1 = \{1 - x^2, 1 + 2x, 1\}$ tiene 3 elementos y es *l.i.*, lo que implica que S_1 es una base de $\mathcal{P}_2$.

□

Para terminar esta sección, demostraremos un resultado que seguramente nos parece natural, pero que es importante resaltar: la dimensión de un subespacio vectorial es a lo sumo la dimensión del espacio vectorial que lo contiene y el único subespacio con la misma dimensión del espacio vectorial que lo contiene es el mismo espacio vectorial.

Teorema 13 [*Máxima dimensión de un subespacio*].
Sean V un espacio vectorial de dimensión n y W un subespacio vectorial de V. Entonces,

1. $dim\ W \leq n$.
2. Si $dim\ W = n$, entonces $W = V$.

Demostración:

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de W. Como $\mathcal{B}$ es un conjunto *l.i.* de V, por el Teorema 10, $\mathcal{B}$ tiene a lo sumo n vectores y por tanto, $dim\ W \leq n$.
2. Si $dim\ W = n$ y $\mathcal{B}$ es una base de W, entonces $W = Gen\ \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ tiene n vectores *l.i.* de W y por tanto de V. Por el Teorema 11, $\mathcal{B}$ es una base de V, lo que implica que $Gen\ \mathcal{B} = V$ y por tanto, $W = V$.

□

4.6. Coordenadas respecto a una base ordenada.

Por el Teorema 7, Pág. 234, dada una base de un espacio vectorial, cada vector del espacio se escribe de manera única como una combinación lineal de los elementos de la base. Así que los coeficientes de la

combinación lineal identifican al vector, como lo establece la siguiente definición.

Definición 8 [*Vector de coordenadas*]. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base (ordenada) del espacio vectorial V. Como para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares únicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v},$$

al vector de $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

lo llamamos *vector de coordenadas* de $\mathbf{v}$ respecto a la base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Claramente, si cambiamos el orden de los vectores de una base, el vector de coordenadas puede cambiar, así como cuando cambiamos al menos un vector de la base.

Ejemplo 28. Demostremos que el vector de coordenadas de un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, respecto a la base canónica, coincide con el vector $\mathbf{v}$.

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Así que $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Por tanto, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{B}$ es la base canónica, por lo que concluimos que $\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

□

Ejemplo 29. Calculemos el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ respecto a la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tenemos que encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante, encontramos que $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ y $\lambda_4 = -1$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

Ejemplo 30. Calculemos $p(x)$, sabiendo que $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y que $\mathcal{B} = \{1 - x, 2x + x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1\}$ es una base de $\mathcal{P}_3$. Por definición de vector de coordenadas,

$$p(x) = 1(1-x) - 1(2x+x^2) + 3(x^2 - x^3) - 2(x^3 - 1) = 3 - 3x + 2x^2 - 5x^3.$$

□

Ejemplo 31. Observemos que al cambiar el orden de los elementos de $\mathcal{B}$ en el ejemplo anterior, las coordenadas de $p(x)$, respecto a la nueva base ordenada, cambian.

Sea $\mathcal{B}' = \{2x + x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1, 1 - x\}$. Como

$$p(x) = -1(2x + x^2) + 3(x^2 - x^3) - 2(x^3 - 1) + 1(1 - x),$$

entonces $[p(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y por tanto, $[p(x)]_{\mathcal{B}'} \neq [p(x)]_{\mathcal{B}}$. □

Otro resultado curioso y supremamente útil es que los coeficientes de una combinación lineal de vectores de un vector dado se conservan al cambiar los vectores por los vectores de coordenadas de estos, respecto a una base dada, lo cual consignamos en el siguiente teorema.

Teorema 14 [*Conservación de los coeficientes de una combinación lineal*].
Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vectores de un espacio vectorial V y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k, \quad \text{si y sólo si,} \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \lambda_1 [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_k [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\,.$$

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V y supongamos que

$$[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, k;$$

es decir,

$$\mathbf{u}_i = u_{1i}\mathbf{v}_1 + u_{2i}\mathbf{v}_2 + \cdots + u_{ni}\mathbf{v}_n.$$

Por consiguiente, si

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} =& \lambda_1(u_{11}\mathbf{v}_1 + u_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + u_{n1}\mathbf{v}_n) + \\ & \qquad \cdots + \lambda_k(u_{1k}\mathbf{v}_1 + u_{2k}\mathbf{v}_2 + \ldots + u_{nk}\mathbf{v}_n) \\ =& (\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12} + \cdots + \lambda_k u_{1k})\mathbf{v}_1 + \\ & \qquad \cdots + (\lambda_1 u_{n1} + \lambda_2 u_{n2} + \ldots + \lambda_k u_{nk})\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

De aquí, que

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_{11} + \cdots + \lambda_k u_{1k} \\ \vdots \\ \lambda_1 u_{n1} + \cdots + \lambda_k u_{nk} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1 [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_k [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}},$$

terminando la demostración de una implicación. Puesto que cada paso es realmente una equivalencia, podemos devolvernos y obtener la demostración de la otra implicación. □

Ejemplo 32. Verifiquemos el resultado del teorema, con la combinación lineal de

$$2x^2 - 2x + 9 = \mathbf{2}(x^2 - 2x + 1) + \mathbf{3}(x + 2) \mathbf{\text{-}1}(x - 1),$$

para las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

No es difícil ver que

$$[2x^2 - 2x + 9]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [x^2 - 2x + 1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[x + 2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [x - 1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{\text{-}1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con cálculos similares, tenemos que

$$[2x^2 - 2x + 9]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [x^2 - 2x + 1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[x + 2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [x - 1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{\text{-}1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

El resultado del Teorema 14 permite plantear un problema de un espacio vectorial de dimensión n que involucre combinaciones lineales

como un problema similar en término de vectores de $\mathbb{R}^n$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 33. Determinemos si

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

es un conjunto de matrices $l.i.$

Sea

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Por consiguiente,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que el conjunto de vectores

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

es $l.i.$ Es decir, que la única combinación lineal de ellos igual al vector nulo es la trivial, así que la única combinación lineal de las matrices del conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

es la trivial, de donde concluimos que

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

es un conjunto $l.i.$ □

Los vectores de coordenadas de un vector dado, respecto a dos bases diferentes, están relacionados entre si mediante el producto por una matriz, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 15 [*Matriz de transición*].
Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases de un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matriz de tamaño $n \times n$, cuyas columnas son los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ respecto a la base $\mathcal{B}'$; es decir,

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'} \right].$$

Entonces, para cada vector $\mathbf{v} \in V$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

A la matriz $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la llamamos *matriz de transición*[7] de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Demostración: Sea $\mathbf{v} \in V$. Como $\mathcal{B}$ genera a V, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

En otras palabras, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Por el Teorema 14, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = \lambda_1 [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} + \lambda_2 [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} + \ldots + \lambda_n [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}$, por tanto,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \ ,$$

donde $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'} \right]$.

□

Algunos resultados interesantes sobre las matrices de transición hacen referencia a que estas matrices son únicas e invertibles y que la inversa de la matriz de transición de una base a otra es la matriz de transición de la segunda base a la primera, lo cual lo planteamos en el siguiente teorema.

[7] Esta matriz también recibe el nombre de *matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Cuando sea claro cuales son las bases, omitimos los índices de la matriz de transición*

Teorema 16 [*Unicidad e invertibilidad de la matriz de transición*]. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases de un espacio vectorial V y sea P la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Es decir,

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}] .$$

1. Si existe otra matriz P' tal que, para cada vector $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P' [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, entonces $P = P'$.
2. La matriz de transición P es invertible y su inversa es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Demostración:

1. Sabemos que para cada vector $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ y que en particular,

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}'} = P [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} = P\mathbf{e}_i \qquad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.7}$$

   Supongamos que existe P' tal que para cada vector $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P' [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Así, en particular,

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}'} = P' [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{B}} = P'\mathbf{e}_i \qquad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

   Por lo tanto, de (4.7) y (4.8),

$$P\mathbf{e}_i = P'\mathbf{e}_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Como $P\mathbf{e}_i$ y $P'\mathbf{e}_i$ son las i-ésimas columnas de P y P', respectivamente, concluimos que $P = P'$.

2. Sabiendo que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, por el Teorema 14, $\{[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$; por lo tanto, $P = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}]$ es una matriz invertible.

   De otro lado, al multiplicar por P^{-1} la igualdad $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, obtenemos

$$P^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} ,$$

   para todo $\mathbf{v} \in V$. Por la unicidad de la matriz de transición, podemos concluir que P^{-1} es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$. □

Ejemplo 34. Sean $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathcal{P}_2$, donde $\mathcal{B}'$ es la base canónica. Encontremos las matrices de transición de una base a la otra.

Puesto que $\mathcal{B}'$ es la base canónica, $[1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[1+x]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[1+x+x^2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, por consiguiente, la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos ahora la matriz de transición de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, para lo cual tenemos que resolver los sistemas que resultan de cada una de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= a_{11}(1) + a_{21}(1+x) + a_{31}(1+x+x^2) \\ &= (a_{11}+a_{21}+a_{31}) + (a_{21}+a_{31})x + a_{31}x^2 \\ x &= a_{12}(1) + a_{22}(1+x) + a_{32}(1+x+x^2) \\ &= (a_{12}+a_{22}+a_{32}) + (a_{22}+a_{32})x + a_{32}x^2 \\ x^2 &= a_{13}(1) + a_{23}(1+x) + a_{33}(1+x+x^2) \\ &= (a_{13}+a_{23}+a_{33}) + (a_{23}+a_{33})x + a_{33}x^2 \end{aligned}$$

Aplicando los algoritmos de eliminación de Gauss y de sustitución hacía atrás a los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21}+a_{31} &= 1 \\ a_{21}+a_{31} &= 0 \\ a_{31} &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{12}+a_{22}+a_{32} &= 0 \\ a_{22}+a_{32} &= 1 \\ a_{32} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13}+a_{23}+a_{33} &= 0 \\ a_{23}+a_{33} &= 0 \\ a_{33} &= 1, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de transición de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que $PP' = I$, así que $P^{-1} = P'$. □

El ejemplo anterior, además de verificar lo establecido en el Teorema 16, nos muestra un hecho importante y que en general es cierto. La matriz de transición de una base a la base canónica es muy fácil de calcular: basta con encontrar los vectores de coordenadas de la base dada en términos de la base canónica; pero, para hallar la matriz de transición de la base canónica a otra base, necesitamos resolver varios sistemas de ecuaciones o, equivalentemente, calcular la inversa de la matriz de transición de la base a la base canónica, lo cual, además de costoso en términos de cálculos, es innecesario para hacer un cambio de coordenadas. Recordemos que, para calcular el producto de la inversa de una matriz por un vector, conociendo la matriz y el vector, el cálculo más eficiente consiste en resolver el sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada esta conformada por la matriz y el vector (Ver comentarios al Ejemplo 15, Pág. 156, de la Sección 3.5).

La observación anterior nos permite inferir que una forma eficiente de expresar (no de calcular) la matriz de transición de una base a otra, diferentes a la base canónica, es mediante el producto de la inversa de la matriz de transición de la segunda base a la base canónica por la matriz de transición de la primera base a la base canónica. Esto es, si P_1 es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica y P_2 es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base canónica, entonces $P_2^{-1}P_1$ es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$, como lo ilustramos en la Figura 4.1.

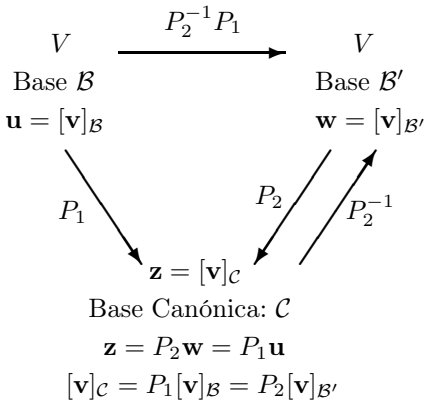


Figura 4.1: Representación esquemática de la matriz de transición de una base a otra

La ecuación que aparece en la parte inferior de la Figura 4.1, $P_1[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P_2[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$, la llamamos *ecuación cambio de base* ya que permite hallar las coordenadas de un vector en una base a partir de las coordenadas del mismo vector en la otra base.

Ejemplo 35. Sean $\mathcal{B} = \{2, 1-x, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x-1, 1+x^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2$. Si $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculemos $[p(x)]_{\mathcal{B}'}$.

Según la Definición 15, la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es $P = [[2]_{\mathcal{B}'} \;\; [1-x]_{\mathcal{B}'} \;\; [x^2]_{\mathcal{B}'}]$ y, para calcular las columnas de P, necesitamos resolver los tres sistemas de ecuaciones lineales que resultan de las siguientes ecuaciones polinomiales

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1(1) + \lambda_2(x-1) + \lambda_3(1+x^2) \\ 1-x &= \alpha_1(1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(1+x^2) \\ x^2 &= \beta_1(1) + \beta_2(x-1) + \beta_3(1+x^2) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para la primera ecuación,

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1(1) + \lambda_2(x-1) + \lambda_3(1+x^2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2)x + (\lambda_3)x^2, \end{aligned}$$

resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 &= \lambda_2 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0. \\ 0 &= \lambda_3 \end{aligned}$$

Después de resolver los otros dos sistemas que se obtienen de las otras dos ecuaciones polinomiales, tenemos que la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$[p(x)]_{\mathcal{B}'} = P[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de resolver el problema es utilizando la ecuación cambio de base, para lo cual necesitamos calcular P_1 y P_2, las matrices

cambio de base de cada una de las bases a la base canónica de $\mathcal{P}_2$, respectivamente, las cuales son fáciles de calcular.

Sea $\mathcal{B}''$ la base canónica de $\mathcal{P}_2$,

$$[2]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [1-x]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \ [x^2]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de transición de } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}'',$$

y

$$[1]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ [x-1]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ [1+x^2]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de transición de } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}''.$$

Según la ecuación cambio de base, $P_1[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P_2[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$, tenemos

$$P_2[p(x)]_{\mathcal{B}'} = P_1[p(x)]_{\mathcal{B}};$$

es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [p(x)]_{\mathcal{B}'} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

para obtener $[p(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. □

Observemos que, en la solución del ejemplo anterior, la primera forma de hacerlo (usando la matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$) requirió la solución de tres sistemas de ecuaciones lineales (lo que es equivalente al calculo de la inversa de una matriz) y una combinación lineal (producto de una matriz por un vector). Por el contrario, lo que parece ser más largo (calcular las coordenadas del vector dado en la base usual y luego las coordenadas de este vector calculado en la otra base), requirió una combinación lineal y la solución de sólo un sistema de ecuaciones lineales.

Observemos también que el segundo procedimiento utilizado para resolver el problema planteado en el ejercicio anterior es equivalente a calcular (en la base usual) el polinomio $p(x)$ cuyas coordenadas nos dan y luego, calcular las coordenadas de este polinomio en la otra base; esto es,

$$p(x) = (-1)2 + (0)(1-x) + (3)x^2 = -2 + 3x^2$$

y luego, encontrar escalares α, β y γ tales que

$$p(x) = -2+3x^2 = \alpha(1)+\beta(x-1)+\gamma(1+x^2) = (\alpha-\beta+\gamma)+(\beta)x+(\gamma)x^2,$$

para lo cual, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & -2 \\ & & \beta & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 3 \end{array},$$

que, en su forma matricial, es exactamente el sistema (4.9).

4.7. Rango y nulidad de una matriz

En el Capítulo 2, definimos dos conjuntos importantes relacionados con una matriz A de tamaño $m \times n$, que resultan ser espacios vectoriales. Ellos son el espacio nulo y el espacio columna:

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

y

$$C_A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\},$$

respectivamente.

En efecto, por el Teorema 1, para demostrar que dada una matriz A de tamaño $m \times n$, N_A y C_A son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$,

respectivamente, basta con demostrar que se satisfacen la propiedades clausurativas tanto para la suma, como para el producto por escalar (Axiomas 1 y 6 de la definición de espacio vectorial), lo cual hicimos en los Teoremas 4 y 5 del Capítulo 2, Págs. 61 y 63, respectivamente.

Como N_A y C_A son espacios vectoriales, tienen base y dimensión. Estas dimensiones son características importantes de la matriz A, por lo que reciben nombres especiales, los cuales presentamos en las siguientes definiciones.

Definición 9 [*Nulidad de una matriz*]. Dada una matriz A, definimos $\nu(A)$, la nulidad de A, como la dimensión del espacio nulo de A.

Definición 10 [*Rango de una matriz*]. Dada una matriz A, definimos $\rho(A)$, el rango de A, como la dimensión del espacio columna de A.

Ejemplo 36. Determinemos la nulidad y el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que una matriz escalonada equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

por tanto, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para todo $\mathbf{b}$. Así que el espacio nulo y el espacio columna de A son $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente; por consiguiente, $\nu(A) = 0$ y $\rho(A) = 3$.

De otro lado, una forma escalonada equivalente del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & c_1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & c_2 - 2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 - 2c_2 + 4c_1 \end{array}\right).$$

Al resolver el sistema de ecuaciones resultante, por sustitución hacía atrás, para cuando $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, obtenemos que

$$N_B = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \; x_3, \; x_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

así que $\nu(B) = 2$. Ahora, puesto que $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ sólo tiene solución cuando $c_3 - 2c_2 + 4c_1 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} C_B &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : c_3 = -4c_1 + 2c_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -4c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} : c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} :\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\rho(B) = 2$. □

En el ejemplo anterior, del sistema de ecuaciones lineales que se plantea para determinar el núcleo o el rango de una matriz, podemos observar que la nulidad de una matriz coincide con el número de variables libres y que el rango coincide con el número de variables pivotales, de tal manera que la suma de la nulidad y el rango de la matriz es el número total de variables del sistema o de columnas de la matriz del sistema, conclusión a la que llegaremos después de presentar una forma de encontrar una base del espacio columna de una matriz dada. Antes, recordemos que las columnas correspondientes de dos matrices equivalentes[8] forman conjuntos de vectores que son ambos *l.i.* o ambos *l.d.* (Teorema 7 del Capítulo 2, Pág. 68)

Ahora, presentemos una forma de encontrar una base del espacio columna de una matriz dada.

Teorema 17 [*Base del espacio columna de una matriz*].
Dada una matriz A, las columnas de A correspondientes a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente a A forman una base de C_A.

Demostración: Sea $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n]$ una matriz de tamaño $m \times n$ y sea $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$ una matriz escalonada equivalente a A, Por el Teorema 7 del Capítulo 2, Pág. 68, las columnas $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ de A forman un conjunto *l.i.*, si y sólo si, las columnas $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}\}$ de

[8]Dos matrices son equivalentes, si y sólo si, una de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales entre filas (Definición 10 del Capítulo 1, Pág. 12).

B son $l.i.$ y, utilizando el Teorema 6 del Capítulo 2, si $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}\}$ son las columna pivotales de B, ellas forman un conjunto $l.i.$

Nuevamente, por el Teorema 6 del Capítulo 2, si $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}\}$ son las columnas pivotales de B, entonces $\{\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \ldots, \mathbf{b}_{i_k}, \mathbf{b}_{i_j}\}$, con $j \neq 1, 2, \ldots, k$, es un conjunto $l.d.$ y, por el Teorema 7 del Capítulo 2, $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_j}\}$ es un conjunto $l.d.$ Además,

$$Gen\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_j}\} = Gen\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\},$$

por el Teorema 5, Pág. 228.

Si, al conjunto $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_j}\}$ le continuamos adjuntando el resto de vectores columna de A, utilizando cada vez el mismo resultado del Teorema 5, tenemos que $Gen\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = Gen\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$. Por consiguiente, el conjunto $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ es $l.i.$ y genera el espacio columna de A; por lo tanto, es una base de C_A. □

De un lado, notemos que la base de C_A está formada por columnas de A y **no** por columnas de la matriz escalonada equivalente. Y de otro lado, notemos que si bien este último teorema nos garantiza que el conjunto de columnas de A **correspondiente** a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente a A es una base de C_A, el teorema **no** está diciendo que sea el único conjunto de columnas que sea base de C_A.

Ejemplo 37. Encontremos una base de

$$V = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores del conjunto generador y B una matriz escalonada equivalente a A. Es decir, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como las primera y segunda columnas de B son sus columnas pivotales, por el teorema anterior, podemos concluir que las primera y

segunda columnas de A,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

forman una base de V. Además, observemos que la primera y segunda columna de B **no** forman una base de C_A (¿Por qué? Ejercicio 20) y que la primera y cuarta columna de A también forman una base de C_A (¿Por qué? Ejercicio 20) □

Ejemplo 38. Encontremos una base de $\mathcal{P}_2$ contenida en $\{1-x, x-2x^2, -2+2x, 1-2x^2, 1+x-x^2\}$.

Por el Teorema 14, un conjunto de vectores es $l.i.$, si y sólo si, sus vectores de coordenadas respecto a una base dada forman un conjunto $l.i.$ Así que, para una base $\mathcal{B}$ dada, basta con identificar, de los vectores $[1-x]_{\mathcal{B}}, [x-2x^2]_{\mathcal{B}}, [-2+2x]_{\mathcal{B}}, [1-2x^2]_{\mathcal{B}}, [1+x-x^2]_{\mathcal{B}}$, cuales forman un conjunto $l.i.$ Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_2$, entonces

$$[1-x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [x-2x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, [-2+2x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[1-2x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } [1+x-x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Al calcular una matriz escalonada equivalente a la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los polinomios dados, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que los polinomios correspondientes a las columnas pivotales de esta matriz escalonada (primera, segunda y quinta columnas) forman una base de $\mathcal{P}_2$; es decir, $\{1-x,\ x-2x^2,\ 1+x-x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$. ¿Existe otro subconjunto del conjunto de polinomios dado que sea una base de $\mathcal{P}_2$? ¿Las primera, segunda y quinta columnas de la matriz escalonada anterior forman una base de $\mathcal{P}_2$? (Ejercicio 26) □

Después de estos resultados, estamos en capacidad de demostrar el teorema que habíamos anunciado, la suma de la nulidad y el rango de una matriz es igual al número de columnas de ella.

Teorema 18 [*Relación entre nulidad y rango de una matriz*]. Dada una matriz A de tamaño $m \times n$,

$$\nu(A) + \rho(A) = n.$$

Demostración: Sean

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$$

una base de N_A,

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

una base de C_A y $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $A\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, k$. Veamos que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, con lo que quedaría demostrado el teorema.

Para tal efecto, comencemos por demostrar que

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

es un conjunto *l.i.* Sea

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{w}_r + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

Al multiplicar ambos lados de la igualdad anterior por la matriz A y teniendo en cuenta que $A(\alpha_i\mathbf{w}_i) = \alpha_i A\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ y $A(\beta_j\mathbf{u}_j) = \beta_j(A\mathbf{u}_j) = \beta_j\mathbf{v}_j$, obtenemos que

$$\beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Por la independencia de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, concluimos que $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$, y por tanto,

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{w}_r + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0}.$$

Ahora, por la independencia de $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$, tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$.

Para demostrar que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ genera a $\mathbb{R}^n$, tomemos un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$. Como $A\mathbf{v} \in C_A$, existen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

escalares tales que $A\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{v}_k$. Construyamos los vectores $\mathbf{u} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k$ y $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Como $A\mathbf{z} = A\mathbf{v} - A\mathbf{u}$ y

$$A\mathbf{u} = \beta_1 A\mathbf{u}_1 + \beta_2 A\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_k A\mathbf{u}_k = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{v}_k = A\mathbf{v},$$

entonces $\mathbf{z} \in N_A$. Por lo tanto, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, tales que $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{w}_r$. Como $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{u}$, concluimos que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{w}_r + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{u}_k.$$

□

Corolario 18.1
Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, su nulidad es igual al número de variables libres del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración: Por el Teorema 18, tenemos que $\nu(A) + \rho(A) = n$ y, por el Teorema 17, tenemos que las columnas de A, correspondientes a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente, forman una base de C_A, así que $\rho(A)$ es el número de columnas pivotales. Por consiguiente, $\nu(A)$ es el número de variables no pivotales; es decir, el número de variables libres del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

□

Ejemplo 39. Verifiquemos el resultado del Teorema 18 usando las matrices del Ejemplo 36.

La matriz A tiene 3 columnas, $\nu(A) = 0$ y $\rho(A) = 3$. La matriz B tiene 4 columnas, $\nu(B) = 2$ y $\rho(B) = 2$. □

Ejemplo 40. Si tenemos un sistema de 15 ecuaciones con 20 incógnitas, ¿Qué podemos decir de las soluciones del sistema, si sabemos que el espacio nulo de la matriz del sistema tiene dimensión 5?

Sea A la matriz de coeficientes del sistema. Entonces, A tiene 15 filas y 20 columnas. Puesto que $\nu(A) = 5$, $\rho(A) = 20 - 5 = 15$. Como, $C_A \subseteq \mathbb{R}^{15}$ y $\rho(A) = 15$, por el Teorema 13, Pág. 240, $C_A = \mathbb{R}^{15}$. Es decir, todo vector de $\mathbb{R}^{15}$ es combinación lineal de las columnas de A, así que el sistema siempre tiene solución; además, son infinitas. □

Sabiendo que el conjunto generado por los vectores formados por las filas de una matriz es un espacio vectorial, nos preguntamos cómo encontrar una base y/o su dimensión y cuáles son sus relaciones con el espacio columna y el espacio nulo de la misma matriz. Comencemos

por definir y presentar algunos resultados del espacio generado por los vectores formados por las filas en si y luego estableceremos algunas relaciones con las dimensiones de los espacios columna y nulo.

Definición 11 [*Espacio fila*]. Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, definimos F_A, *el espacio fila* de A, como el espacio generado por los vectores formados por las filas de A.

Observemos que, como las filas de A son las columnas de A^T, el espacio generado por los filas de A (F_A) es igual al espacio generado por las columnas de A^T (C_{A^T}); es decir,

$$F_A = C_{A^T}.$$

Ejemplo 41. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

encontremos el espacio fila de A, una base del mismo y su dimensión.

Por la Definición 11, el espacio fila de A es

$$F_A = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4,\ \mathbf{y} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para encontrar una base de F_A, basta determinar cuales de los vectores formados por las filas de A forman un conjunto *l.i.*, para lo cual, escalonamos la matriz cuyas columnas son dichos vectores, es decir, la matriz A^T. Escalonando la matriz

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{obtenemos} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

de donde podemos afirmar que los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (las columnas 1ª y 2ª de A^T) forman un conjunto *l.i.*; por lo tanto, forman una base de F_A y $dim(F_A) = 2$. □

A diferencia de lo que ocurre entre los espacios columna de las matrices respectivas, al aplicar una operación elemental entre filas a una matriz, las filas de la nueva matriz generan el mismo espacio que el de la matriz inicial como veremos en el siguiente teorema[9].

Teorema 19 [*Base del espacio fila de una matriz*].
Si las matrices A y B son equivalentes, entonces $F_A = F_B$ y si B es una matriz escalonada, el conjunto de vectores formados por las filas de B, diferentes a cero, es *l.i.* y por tanto, es una base de F_B.

Demostración: Basta demostrar que si B es la matriz que se obtiene al aplicarle una operación elemental a A, entonces $F_A = F_B$. Sean $\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \ldots,\ \mathbf{f}_m$ los vectores formados por las filas de la matriz A. Si la operación es de tipo permutación, el conjunto de vectores formados por las filas de las dos matrices es el mismo y por tanto, el conjunto generado por las filas de las dos matrices también es el mismo. Si la operación es de tipo escalamiento, $cF_i \longrightarrow F_i$, es fácil ver que si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \lambda_i\mathbf{f}_i + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$, entonces $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \frac{\lambda_i}{c}c\mathbf{f}_i + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$ y por tanto, el conjunto generado por las filas de las dos matrices es el mismo. Y si la operación es de tipo eliminación, $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$, podemos ver que si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \lambda_i\mathbf{f}_i + \ldots + \lambda_j\mathbf{f}_j + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$, entonces $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \lambda_i(\mathbf{f}_i + c\mathbf{f}_j) + \ldots + (\lambda_j - \lambda_i c)\mathbf{f}_j + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$ y por tanto, el conjunto generado por las filas de las dos matrices también es el mismo.

La demostración de que el conjunto de vectores formados por las filas de la matriz escalonada equivalente, diferentes a cero, es *l.i.*, la dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 28). □

Ejemplo 42. Utilicemos el Teorema 19 para encontrar otra base de F_A, siendo A la matriz dada en el Ejemplo 41.

Al escalonar la matriz A dada en el Ejemplo 41, obtenemos la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente, los vectores formados por las filas 1ª y 2ª de U forman un conjunto *l.i.*; por lo tanto, forman una base de F_U. Como A y U son matrices equivalentes, por el Teorema 19, $F_U = F_A$, entonces, dicho conjunto es también una base de F_A. □

[9]Este resultado es de esperarse, ya que las operaciones elementales entre filas son cambios de orden o combinaciones lineales entre ellas.

Observemos que la dimensión del espacio columna de una matriz es el número de columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente y, en la matriz escalonada, cada fila diferente de cero contiene un pivote, lo que implica que las dimensiones de los espacios fila y columna son las mismas, lo que planteamos, sin demostración, en el siguiente teorema.

Teorema 20 [*Relación entre espacio columna y espacio fila de una matriz*].
Dada cualquier matriz A, $dim\ C_A = dim\ F_A$.

A partir de este teorema, como la dimensión del espacio fila de una matriz es igual a la dimensión del espacio columna de su transpuesta, podemos concluir que el rango de una matriz y el de su transpuesta son iguales; lo cual resumimos en el siguiente corolario.

Corolario 20.1 [*Relación entre el rango de una matriz y el de su transpuesta*].
Dada cualquier matriz A, $\rho(A) = \rho(A^T)$.

A lo largo de esta sección, hemos obtenido varios resultados que relacionan los sistemas de ecuaciones lineales con los espacios vectoriales asociados a una matriz, los cuales consignaremos en dos teoremas resumen. La demostración de la mayoría de las implicaciones ya las hemos hecho y una generalización de estos resúmenes se plantea como ejercicio para el lector (Ejercicio 21).

Teorema 21 [*Resumen 1*].
Sea A una matriz $m \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. El número de pivotes de la matriz escalonada equivalente a A es n.
2. Las columna de A forman un conjunto de vectores $l.i.$
3. $\rho(A) = n$
4. $dim\ C_A = n$.

5. $\rho(A^T) = n$
6. $dim\ F_A = n$.
7. $\nu(A) = 0$.
8. $N_A = \{\mathbf{0}\}$.
9. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.

Teorema 22 [*Resumen 2*].
Sea A una matriz $m \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El número de pivotes de la matriz escalonada equivalente a A es m.
2. Las columna de A generan a $\mathbb{R}^m$.
3. $\rho(A) = m$
4. $dim\ C_A = m$.
5. $\rho(A^T) = m$
6. $dim\ F_A = m$.
7. Cada fila de una matriz escalonada equivalente a A tiene un pivote.
8. $\nu(A) = n - m$.
9. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todo $\mathbf{b}$.

Para el caso de las matrices cuadradas, los dos teoremas anteriores se pueden condensar en el siguiente corolario.

Corolario 22.1 Sea A una matriz $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El número de pivotes de la matriz escalonada equivalente a A es n.
2. Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
3. Las columnas de A forman un conjunto de vectores $l.i.$

4. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
5. $\rho(A) = n$
6. $dim\ C_A = n$.
7. $dim\ F_A = n$.
8. Cada fila de una matriz escalonada equivalente a A tiene un pivote.
9. $\nu(A) = 0$.
10. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para todo $\mathbf{b}$.
11. La matriz A es invertible.
12. $\det A \neq 0$.

4.8. Producto escalar y bases ortonormales en $\mathbb{R}^n$

En el Capítulo 2, para los vectores de $\mathbb{R}^n$, definimos otra operación además de la suma y el producto por escalar: el *producto escalar*. Esta operación nos permitió caracterizar los vectores ortogonales: dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales, si y sólo si, su producto escalar es 0. En general, si en un espacio vectorial definimos una operación que cumpla las propiedades básicas del producto escalar, podemos extender el concepto de ortogonalidad a este espacio vectorial[10].

Sin embargo, en esta sección, nos limitaremos a estudiar las principales propiedades que tiene un conjunto de vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$, ya que por los resultados de la Sección 4.6, tanto el producto escalar como dichas propiedades se pueden extender a cualquier espacio vectorial de dimensión n.[11]

[10] El producto escalar definido en $\mathbb{R}^n$ es sólo un caso particular de lo que conocemos como *producto interno* de un espacio vectorial, y un producto interno en un espacio vectorial V es una función que a cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ asigna un número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ y satisface las siguientes propiedades para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
2. $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
3. $\alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ ($\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

[11] Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vectores de un espacio vectorial V y sea $\mathcal{B}$ una base de V; como $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$,

Para empezar, recordemos que el concepto de ortogonalidad está definido para dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Hablaremos de un conjunto de vectores ortogonales, cuando tengamos un conjunto de vectores que dos a dos son ortogonales, como lo planteamos en la siguiente definición.

Definición 12 [*Conjunto ortogonal*]. Decimos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ de $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ es ortogonal, si y sólo si, cualquier par de vectores diferentes del conjunto son ortogonales. Es decir, el conjunto de vectores dado es ortogonal, si y sólo si, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, para todo $i \neq j$.

Ejemplo 43. Veamos que cualquier subconjunto del conjunto de vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal.
Es fácil ver que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ para todo $i \neq j$, ya que las únicas componentes de $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ diferentes de cero son la i-ésima y la j-ésima, respectivamente; por tanto, el producto de componente por componente es cero. □

Los conjuntos ortogonales satisfacen propiedades muy importantes, una de ellas es que son *l.i.* y su demostración es trivial.

Teorema 23 [*Ortogonalidad e independencia lineal*].
Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores ortogonales de $\mathbb{R}^n$, entonces S es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Demostración: Expresemos el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$,

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k \tag{4.10}$$

y verifiquemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Al multiplicar escalarmente la ecuación (4.10) por $\mathbf{v}_i$, obtenemos $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, ya que por ser S un conjunto ortogonal, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, para $i \neq j$. Así que

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k.$$

□

Siguiendo un razonamiento muy similar al de esta última demostración, podemos calcular fácilmente los coeficientes de la combinación

con base en el producto escalar definido en $\mathbb{R}^n$, podemos definir $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, el producto escalar en V, como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

lineal de vectores ortogonales para un vector dado del subespacio generado por ellos, como lo ilustra el siguiente teorema, siendo ésta otra de las ventajas importantes de trabajar con un conjunto de vectores ortogonales.

Teorema 24 [*Ortogonalidad y combinación lineal*].
Dado $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, un conjunto de vectores ortogonales de $\mathbb{R}^n$, si $\mathbf{u} \in Gen\ S$; es decir, si

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k, \tag{4.11}$$

entonces

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Demostración: Al multiplicar escalarmente la ecuación (4.11) por $\mathbf{v}_i$, obtenemos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i$, ya que por ser S un conjunto ortogonal, $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j = 0$, para $i \neq j$. De donde,

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k.$$

□

Ejemplo 44. Dado el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

verifiquemos que S es un conjunto ortogonal y escribamos el vector $(-3 \quad -3 \quad 3)^T$ como combinación lineal de los vectores de S.

El conjunto S es ortogonal, ya que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0+2-2 = 0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0+2-2 = 0$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -5+1+4 = 0.$$

Por el Teorema 24, basta con calcular

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3-3+6 = 0, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1+1+4 = 6$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0-6-3 = -9, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0+4+1 = 5$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 - 3 + 6 = 18$$

y

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 25 + 1 + 4 = 30$$

y calcular los cocientes $\frac{0}{6} = 0$, $\frac{-9}{5} = -1{,}8$ y $\frac{18}{30} = 0{,}6$, para concluir que

$$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -9/5 \\ 18/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ -1{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} .$$

□

La ortogonalidad de un conjunto de vectores se puede caracterizar en términos del producto de una matriz con su transpuesta, como se expresa en el interesante resultado del siguiente teorema.

Teorema 25 [*Caracterización de un conjunto ortogonal*].
Sea A una matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. Entonces, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es un conjunto ortogonal de vectores, si y sólo si, $A^T A = D = (d_{ij})$ es una matriz diagonal; además, $d_{ii} = \|\mathbf{v}_i\|^2$.

Demostración: Al realizar el producto de las matrices A^T y A, tenemos que si $D = A^T A$,

$$d_{ij} = fil_i(A^T) \cdot col_j(A) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$

y puesto que $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, si y sólo si, $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$ son ortogonales para $i \neq j$ y $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \|\mathbf{v}_i\|^2$, entonces

$$d_{ij} = \begin{cases} \|\mathbf{v}_i\|^2 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases} ,$$

si y sólo si, $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$ son ortogonales. □

Cuando los vectores de un conjunto, además de ser ortogonales, son unitarios, les llamamos de una manera especial.

Definición 13 [*Conjunto ortonormal*]. Diremos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal, si y sólo si, además de ser un conjunto ortogonal, cada uno de los vectores $\mathbf{v}_i$ es unitario. En otras palabras, si y sólo si,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplo 45. Cualquier subconjunto no vacío de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ortonormal de vectores. □

Ejemplo 46. Verifiquemos que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto ortonormal.

En efecto,

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{52}} - \frac{3}{\sqrt{52}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 = 1$$

□

Por las propiedades de los conjuntos ortogonales que hemos presentado, el tener una base formada por un conjunto ortogonal de vectores representa ciertas ventajas que queremos destacar, especialmente cuando los vectores de dicho conjunto tienen norma uno. Empecemos por darle un nombre a este tipo especial de bases.

Definición 14 [*Base ortogonal y ortonormal*]. Si $\mathcal{B}$ es una base del subespacio V de $\mathbb{R}^n$ y al mismo tiempo es un conjunto ortogonal de vectores, diremos que $\mathcal{B}$ es una *base ortogonal* de V, y si además, $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal de vectores, diremos que $\mathcal{B}$ es una *base ortonormal* de V.

Ejemplo 47. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal puesto que, además de ser una base de $\mathbb{R}^n$, es un conjunto ortogonal y cada uno de sus elementos tiene norma 1. □

Por el resultado del Teorema 24, una de las principales ventajas de tener una base ortonormal de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es que podemos encontrar fácilmente los coeficientes de la combinación lineal, en dicha base, de cualquier vector del subespacio.

Teorema 26 [*Ortonormalidad y combinación lineal*].
Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortonormal de un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}$ está en V, entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k,$$

donde $\lambda_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demostración: Por ser $\mathcal{B}$ una base de V, cualquier vector $\mathbf{u}$ de V, se puede escribir como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$, y, por el Teorema 24, tenemos que $\lambda_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Ahora, como los vectores de $\mathcal{B}$ son unitarios, $\lambda_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i$. □

Ejemplo 48. Sean $V = Gen\ \mathcal{B}$,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ es el conjunto dado en el Ejemplo 46. Determinemos si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ pertenecen a V.

Como $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal, $\mathcal{B}$ es un conjunto *l.i.* y, puesto que por la definición de V, $\mathcal{B}$ genera a V, tenemos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ los vectores de $\mathcal{B}$. Para determinar si $\mathbf{u} \in V$, debemos encontrar escalares α_1 y α_2 tales que $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$. De otro lado, si $\mathbf{u} \in V$, por el Teorema 26, $\alpha_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ y $\alpha_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$. En efecto, podemos verificar que $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{v}_1 + \sqrt{14}\mathbf{v}_2$; por lo tanto, $\mathbf{u} \in V$.

En forma similar, para determinar si $\mathbf{w} \in V$, debemos encontrar escalares α_1 y α_2 tales que $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$. Como $\mathcal{B}$ es una base

ortonormal de V, si $\mathbf{w} \in V$, por el Teorema 26,

$$\alpha_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \text{ y } \alpha_2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Pero, como $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = -\sqrt{3}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{\sqrt{14}}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \neq \mathbf{w}$, concluimos que el vector $\mathbf{w}$ no pertenece al subespacio V. □

4.9. Proyección ortogonal

Comparando el resultado del Teorema 26 con los procedimientos requeridos para calcular el vector de coordenadas de un vector en una base ordenada que no es ortogonal, resulta importante preguntarnos si todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tienen bases ortonormales, lo que respondemos afirmativamente al final de esta sección, donde además, ilustramos cómo, a partir de una base del subespacio, podemos encontrar una base ortonormal para el mismo subespacio. Para facilitar la comprensión de dicho procedimiento, generalicemos el concepto de proyección ortogonal de un vector sobre otro, a la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio de $\mathbb{R}^n$, para lo cual introducimos la siguiente definición.

Definición 15. [*Ortogonalidad a un subespacio*]. Diremos que un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, si y sólo si, el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a todos y cada uno de los vectores del subespacio $S - \{\mathbf{0}\}$; es decir,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in S.$$

Ejemplo 49. Sea S el subespacio definido por un hiperplano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^n$. Por la definición de hiperplano (Definición 23 del Capítulo 2, Pág. 103), su vector normal es ortogonal a S. □

Afortunadamente, no es necesario verificar los infinitos productos escalares que la anterior definición sugiere para verificar la ortogonalidad de un vector a un subespacio; en realidad, es suficiente y necesario que el vector sea ortogonal a un conjunto generador del subespacio, como lo plantea el siguiente teorema.

Teorema 27 [*Caracterización de ortogonalidad de un vector a un subespacio*].
Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal al subespacio

$$S = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\},$$

si y sólo si, el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$, que sean diferentes de cero.

Demostración: Si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a S, por la Definición 15, $\mathbf{u}$ es ortogonal a todos los vectores de S, y en particular, $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots k$. En el otro sentido, si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = 0$ para $i = 1, 2 \ldots k$. Sea $\mathbf{v} \in S$, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k,$$

por lo tanto,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k = 0.$$

Es decir, $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo $\mathbf{v} \in S$, y por definición, $\mathbf{u}$ es ortogonal a S. □

Ejemplo 50. Verifiquemos que $\mathbf{u} = (-1 \ -1 \ 2)^T$ es ortogonal al plano

$$\mathcal{P} = \{(x \ y \ z)^T : \ x + y - 2z = 0, \ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Como de la ecuación del plano tenemos que $x = 2z - y$, entonces

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z - y \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ y, z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ y, z \in \mathbb{R} \right\};$$

por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan al plano $\mathcal{P}$. Como el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 = 0$), por el Teorema 27, $\mathbf{u}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$.[12] □

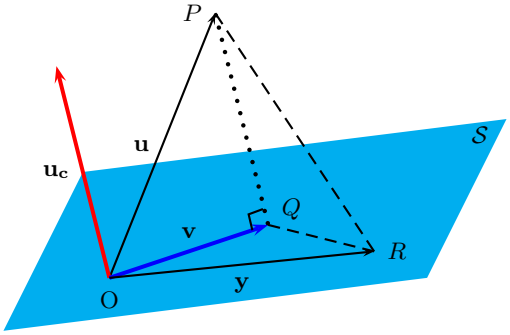


Figura 4.2: Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio ($\mathbf{v} = Proy_S\mathbf{u}$)

De la misma forma como un vector de $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer como la suma de dos vectores ortogonales (Pág. 80), con uno de ellos en la dirección de otro vector dado, podemos utilizar el concepto de ortogonalidad de un vector a un subespacio para expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ como la suma de dos vectores ortogonales, con uno de ellos perteneciente al subespacio. Además, este último vector define el punto del subespacio más cercano al punto definido por el vector inicial. Precisemos estas ideas en el siguiente teorema.

Teorema 28 [*Proyección ortogonal sobre un subespacio*].
Sean S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe un único vector $\mathbf{v} \in S$ tal que

1. $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ es ortogonal al subespacio S ó $\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$.
2. $||\mathbf{u}_c|| \leq ||\mathbf{u} - \mathbf{y}||$ para todo $\mathbf{y} \in S$.

Al vector $\mathbf{u}_c$ lo llamamos *la componente de* $\mathbf{u}$ *ortogonal a* S y al vector $\mathbf{v} = Proy_S\mathbf{u}$, la *proyección ortogonal* de $\mathbf{u}$ en S.

Demostración: Sean $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base de S y A la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_k]$.

1. Demostrar la existencia de $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ es ortogonal a S es equivalente a demostrar la existencia de un vector $\mathbf{x} = (\alpha_1\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)^T$ tal que $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - A\mathbf{x}$ sea ortogonal a S, ya que por definición de base, si $\mathbf{v} \in S$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$. Ahora,

[12] Usando los conceptos de la última sección del Capítulo 2, también podemos verificar que $\mathbf{u}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, observando que $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{n} = (1\ \ 1\ \ -2)^T$, un vector normal del plano $\mathcal{P}$.

$\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - A\mathbf{x}$ es ortogonal a S, si y sólo si, $\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{u} - A\mathbf{x}) = 0$, para toda $i = 1, 2, \ldots, k$ (Teorema 27) o lo que es equivalente, $A^T(\mathbf{u} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$. Pero, como $A^T A$ es invertible (Ejercicio 18), entonces $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$ tiene solución única y por tanto, $\mathbf{v} = A\mathbf{x}$ es el único vector tal que $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ es ortogonal a S.

2. Sea $\mathbf{y}$ un vector arbitrario de S. Como $Proy_S\mathbf{u} \in S$, entonces $Proy_S\mathbf{u} - \mathbf{y} \in S$. Así,

$$||\mathbf{u} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{u} - Proy_S\mathbf{u} + Proy_S\mathbf{u} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{u}_c + Proy_S\mathbf{u} - \mathbf{y}||$$

Como $\mathbf{u}_c$ es ortogonal a S, en particular tenemos que $\mathbf{u}_c$ es ortogonal a $Proy_S\mathbf{u} - \mathbf{y}$. Así que, por el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo PQR de la Fig. 4.2,

$$||\mathbf{u} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{u}_c||^2 + ||Proy_S\mathbf{u} - \mathbf{y}||^2.$$

De donde concluimos que

$$||\mathbf{u} - \mathbf{y}||^2 \geq ||\mathbf{u}_c||^2.$$

□

Observemos que si el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal a S, entonces $Proy_S\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}$ (Fig. 4.3-izquierda); y si el vector $\mathbf{u} \in S$, entonces $Proy_S\mathbf{u} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$ (Fig. 4.3-derecha).

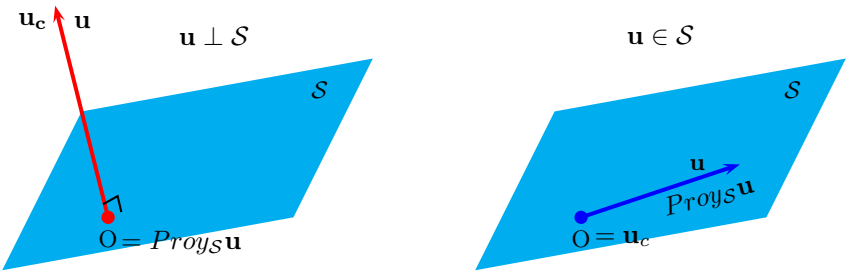


Figura 4.3: Casos especiales de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Ejemplo 51. Encontremos la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (1\ -1\ 0\ 2)^T$ en el hiperplano

$$\mathcal{H} = \{(x\ \ y\ \ z\ \ w)^T :\ x - z + w = 0,\ x, y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Como de la ecuación del hiperplano tenemos que $z = x + w$, entonces

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+w \\ w \end{pmatrix} : x, y, w \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y, w \in \mathbb{R} \right\};$$

por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$ y $\mathbf{v}_3 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$ generan a $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto *l.i.* (Ejercicio 14), $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{H}$.

Por el Teorema 28, $Proy_{\mathcal{H}}\mathbf{u} = A\mathbf{x}$, donde $A = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3]$ y $\mathbf{x}$ es la solución de $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$. Como

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

al aplicarle la eliminación de Gauss y la sustitución hacia atrás a la matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$, obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$; por lo tanto, la solución de $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$ es $\mathbf{x} = (0\ \ -1\ \ 1)^T$ y

$$Proy_{\mathcal{H}}\mathbf{u} = A\mathbf{x} = (0\ \ -1\ \ 1\ \ 1)^T.$$

□

De los resultados presentados en el teorema anterior, debemos destacar dos aspectos importantes. Primero, el teorema nos garantiza la existencia de un punto en cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ que minimiza la distancia de un punto dado de $\mathbb{R}^n$ a los puntos del subespacio y que dicha distancia mínima, la cual llamamos *distancia del punto al subespacio*, es la magnitud de la componente ortogonal al subespacio del vector que define el punto dado, lo cual es muy importante en los procesos de aproximación por Mínimos Cuadrados Lineales[13].

[13]El problema de Mínimos Cuadrados Lineales consiste en hallar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que minimice $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$, para una matriz A de tamaño $m \times n$ y un vector $\mathbf{b}$ dados. En este mismo contexto, el sistema de ecuaciones lineales, $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$, el cual proporciona la(s) solución(es) del problema de mínimos cuadrados lineales, se conoce con el nombre de *Ecuaciones Normales* [6], [15].

Segundo, observemos que, aunque no es necesario, si en la demostración anterior, hubiésemos escogido una base ortogonal del subespacio, por el Teorema 25, $A^TA = D$; o si hubiésemos escogido una base ortonormal, por el mismo Teorema 25, $A^TA = I$; por lo tanto, el cálculo de $Proy_S\mathbf{u}$ se hubiese simplificado. En efecto, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortogonal de S,

$$Proy_S\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k, \tag{4.12}$$

y si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortonormal de S,

$$Proy_S\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k, \tag{4.13}$$

(Ejercicio 33). Sin embargo, no lo hicimos así para no dar la falsa impresión que la proyección ortogonal requiere de una base ortogonal y porque aún no hemos demostrado que todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortogonal.

Ejemplo 52. Calculemos la distancia del punto definido por el vector $\mathbf{u}$ al hiperplano $\mathcal{H}$, para $\mathbf{u}$ y $\mathcal{H}$ dados en el Ejemplo 51.

Por la observación anterior, la distancia de $\mathbf{u}$ a $\mathcal{H}$ es la norma de $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - Proy_{\mathcal{H}}\mathbf{u}$, la componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathcal{H}$; es decir,

$$||\mathbf{u}_c|| = ||\mathbf{u} - Proy_{\mathcal{H}}\mathbf{u}|| = ||(1\ 0\ -1\ 1)^T|| = \sqrt{3}.$$

□

Ejemplo 53. Encontremos la proyección ortogonal de $\mathbf{w}$ en V, para el vector $\mathbf{w}$ y el subespacio V dados en el Ejemplo 48.

Teniendo en cuenta los datos y la notación del Ejemplo 48, como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, por la Ecuación (4.13), tenemos que

$$\begin{aligned} Proy_V\mathbf{w} &= (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_2 \\ &= \left[\frac{-3}{\sqrt{3}}\right]\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\frac{4}{\sqrt{14}}\right]\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observemos también que como $Proy_S\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{u}_c = \mathbf{u} - Proy_S\mathbf{u}$, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base de S, entonces

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}\} = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_c\}. \tag{4.14}$$

Con base en los resultados anteriores, veamos como obtener una base ortogonal y una base ortonormal para cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$, a partir de una base del subespacio, y demostrar así la existencia de bases ortogonales y ortonormales para todo subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 29 [*Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*]. Todo subespacio S de $\mathbb{R}^n$, $S \neq \{\mathbf{0}\}$, tiene al menos una base ortonormal.

Demostración: Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ diferente de $\{\mathbf{0}\}$. Por el Teorema 6, Pág. 234, existe al menos una base de S. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base de S. Construyamos, a partir de esta base, a $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, una base ortogonal de S y luego la normalizamos para obtener una base ortonormal.

La idea de la demostración es definir a $\mathbf{u}_i$ como la componente de $\mathbf{v}_i$ ortogonal al subespacio generado por los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$, previamente definidos, empezando con $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ y el subespacio $Gen\{\mathbf{u}_1\}$. Así, $\mathbf{u}_2$ es la componente de $\mathbf{v}_2$ ortogonal al subespacio $Gen\{\mathbf{u}_1\}$, por lo tanto, usando 4.12,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$

y por (4.14),

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2\} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}.$$

Supongamos que de esta forma, hemos construido el conjunto de vectores ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ tal que

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{i-1}\} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}.$$

Definamos $\mathbf{u}_i$ como la componente de $\mathbf{v}_i$ ortogonal al subespacio

$$Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}.$$

Por lo tanto, usando nuevamente 4.12,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \left(\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{i-1}}{\mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1}}\mathbf{u}_{i-1}\right)$$

y por (4.14),

$$\begin{aligned} Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i\} &= Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_i\} \\ &= Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i\}, \end{aligned}$$

lo cual podemos continuar hasta $i = k$, obteniendo así un conjunto ortogonal de k vectores que genera a S y por consiguiente, es una base ortogonal de S. Finalmente, es fácil verificar que

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||}, \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||}, \ldots, \frac{\mathbf{u}_k}{||\mathbf{u}_k||} \right\}$$

es una base ortonormal de S. □

Ejemplo 54. Encontremos una base ortogonal y otra ortonormal del hiperplano $\mathcal{H}$ dado en el Ejemplo 51.

En el Ejemplo 51, demostramos que los vectores $\mathbf{v}_1 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ y $\mathbf{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 1)^T$ forman una base de $\mathcal{H}$. Siguiendo las ideas sugeridas en la demostración del Teorema 29 para construir una base ortogonal, sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si normalizamos los vectores de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, la cual es una base ortogonal de $\mathcal{H}$, obtenemos

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

que es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. □

4.10. Factorización QR

De la misma forma como el algoritmo de eliminación de Gauss nos permitió factorizar una matriz como el producto de dos matrices triangulares, una inferior y otra superior, el Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (Teorema 29) nos permite factorizar una matriz como el producto de dos matrices, una ortonormal y otra triangular superior. Aunque el resultado es válido para cualquier matriz de tamaño $m \times n$, en el siguiente teorema, nos limitamos al caso de las matrices de *rango completo* (matrices cuyo rango es igual al número de columnas; es decir, matrices cuyas columnas forman un conjunto *l.i.*)

Teorema 30 [*Factorización QR*].
Para toda matriz A de tamaño $m \times n$, cuyas columnas forman un conjunto *l.i.*, existe una matriz Q de tamaño $m \times n$, cuyas columnas forman un conjunto ortonormal, y una matriz triangular superior R de tamaño $n \times n$ tales que

$$A = QR.$$

Demostración: Sea $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n]$, cuyas columnas $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, forman un conjunto *l.i.* Por el Teorema 17, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es una base de C_A, el espacio columna de A. Por el Teorema 29, existe $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, una base ortogonal de C_A, tal que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1$ y

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_j - \left(\frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_{j-1}}{\mathbf{u}_{j-1} \cdot \mathbf{u}_{j-1}}\mathbf{u}_{j-1} \right),$$

para $j = 2, \ldots, n$. Reescribiendo estas ecuaciones, tenemos que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{u}_1$ y

$$\mathbf{a}_j = \left(\frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_{j-1}}{\mathbf{u}_{j-1} \cdot \mathbf{u}_{j-1}}\mathbf{u}_{j-1} \right) + \mathbf{u}_j,$$

para $j = 2, \ldots, n$. Si $\hat{Q} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_n]$, las anteriores ecuaciones las podemos escribir como

$$\mathbf{a}_j = \hat{Q}\mathbf{r}_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots n,$$

donde r_{ij}, la componente i de $\mathbf{r}_j$, es

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.15}$$

Si $\hat{R} = [\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \ldots\ \mathbf{r}_n]$, tenemos que $A = \hat{Q}\hat{R}$. Sea D la matriz diagonal con $d_{ii} = ||\mathbf{u}_i||$, la cual es invertible, ya que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un conjunto ortogonal y sean $Q = \hat{Q}D^{-1}$ y $R = D\hat{R}$. Las matrices que buscamos son Q y R, ya que

1. La matriz Q tiene columnas ortonormales: Por el Teorema 25, $\hat{Q}^T\hat{Q} = D^2$; por lo tanto,
$$Q^TQ = (\hat{Q}D^{-1})^T(D^{-1}\hat{Q}) = D^{-1}(\hat{Q}^T\hat{Q})D^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I_n$$
2. La matriz R es triangular superior: Porque $\hat{R}$ es triangular superior y D es diagonal.
3. $A = QR$: Por la definición de Q y R, tenemos que
$$QR = (\hat{Q}D^{-1})(D\hat{R}) = \hat{Q}(D^{-1}D)\hat{R} = \hat{Q}\hat{R} = A$$

□

Ejemplo 55. Calculemos la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt para hallar $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, una base ortogonal de C_A, a partir del conjunto de vectores formados por las columnas de A, obtenemos $\mathbf{u}_1 = (2\ -2\ 0\ 1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (0\ 2\ 2\ 4)^T$ y $\mathbf{u}_3 = (2\ 2\ -2\ 0)^T$. Por el resultado del Teorema 30, si $\hat{Q} = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3]$,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} ||u_1|| & 0 & 0 \\ 0 & ||u_2|| & \\ 0 & 0 & ||u_3|| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

entonces $A = QR$, donde

$$Q = \hat{Q}D^{-1} = \left[\frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||}\ \ \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||}\ \ \frac{\mathbf{u}_3}{||\mathbf{u}_3||}\right] = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -2/3 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/3 & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$R = D\hat{R} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

□

Un análisis detallado del Teorema 30 nos lleva a concluir que una vez calculada una base ortogonal a partir de una base dada, tenemos todos los elementos necesarios para calcular la factorización QR de la matriz cuyas columnas son los vectores de la base dada. En efecto, la matriz Q tendrá como columnas los vectores de la base ortogonal hallada debidamente normalizados (en otras palabras, los vectores de la base ortonormal correspondiente) y la matriz R será el producto de la matriz diagonal formada con las normas de los vectores de la base ortogonal, cuyos valores se calcularon para normalizar la base ortogonal, y la matriz triangular superior con unos en la diagonal cuyas columnas están formadas por el opuesto de los coeficientes utilizados en el cálculo de cada uno de los vectores de la base ortogonal, como lo define la expresión (4.15). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 56. Utilicemos los resultados del Ejemplo 54 para calcular la factorización QR de la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$; es decir, de la matriz $A = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3]$.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, sea Q la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal calculada, es decir,

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

D la matriz diagonal formada con las normas de los vectores de la base ortogonal, es decir,

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix};$$

y $\hat{R}$ la matriz triangular superior con unos en la diagonal cuyas columnas son los opuestos de los coeficientes utilizados en el cálculo de

los vectores de la base ortogonal, es decir,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$R = D\hat{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

y podemos verificar que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = QR.$$

□

Para terminar, observemos que la factorización QR, además de darnos una base ortonormal de C_A, el espacio columna de la matriz A, nos brinda una forma de resolver $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, el sistema de ecuaciones lineales que surge en el cálculo de la solución del Problema de Mínimos Cuadrados Lineales, ($Min\ ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$), sin necesidad de calcular la matriz A^TA, lo cual se deja como ejercicio para el lector (Ejercicio 36).

La factorización QR, al igual que la factorización LU, también nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales, en general. En efecto, para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, como $A = QR$ y $Q^TQ = I$, tenemos $(QR)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o equivalentemente, $Q(R\mathbf{x}) = \mathbf{b}$; por lo tanto, $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$, el cual es un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver mediante sustitución hacia atrás, ya que la matriz R es triangular superior[14].

[14] Ver más detalles en [6] y [15]

4.11. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo. Tenga en cuenta que algunos de ellos fueron presentados, en el Capítulo 2, para el caso particular del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Conceptos	**Pág.**	**Conceptos**	**Pág.**
Espacio vectorial	212	Matriz de transición	246
Vector	212	Matriz cambio de base	246
Subespacio vectorial	217	Ecuación cambio de base	249
Combinación lineal	219	Nulidad de una matriz	253
Coeficientes de una combinación lineal	219	Rango de una matriz	253
Combinación lineal trivial	219	Espacio fila	259
Conjunto generado	220	Conjunto ortogonal	264
Conjunto generador	220	Conjunto ortonormal	267
Conjunto *l.d.*	224	Base ortogonal	267
Conjunto *l.i.*	224	Base ortonormal	267
Base	231	Ortogonalidad a un subespacio	269
Base canónica de $\mathbb{R}^n$	231	Proyección ortogonal sobre un subespacio	271
Base canónica de $\mathcal{P}_n$	232	Componente ortogonal	271
Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}$	232	Ortogonalización de Gram-Schmidt	275
Dimensión	236	Factorización QR	277
Vector de coordenadas	241		

1. Determine si los siguientes conjuntos, con las operaciones indicadas, son espacios vectoriales (reales).

   a) El conjunto de los números complejos con la suma $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ y el producto por escalar $\lambda(a+bi)=(\lambda a)+(\lambda b)i$, siendo $i=\sqrt{-1}$.

   b) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ con la suma $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$ y el producto por escalar $\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

2. Determine si los siguientes conjuntos, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar "usuales " o ya definidas para cada conjunto, son espacios vectoriales (reales). [AYUDA: Determine si los conjuntos dados son subespacios de un espacio vectorial conocido]
   a) El conjunto de matrices simétricas 8×8.
   b) El conjunto de puntos del segundo cuadrante del plano cartesiano.
   c) $\{(x \;\; y \;\; z)^T : \; 2x - y + 5z = 10, \; x, y, z \in \mathbb{R}\}$
   d) El conjunto de polinomios de grado 3.
   e) El conjunto de puntos de la recta que pasa por $P = (1 \;\; -2 \;\; 3)^T$ y $Q = (5 \;\; 0 \;\; -1)^T$.
   f) El conjunto de puntos del plano que pasa por
   $$P = (1 \;\; -2 \;\; 3 \;\; -1)^T, \; Q = (5 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2)^T \text{ y } R = (3 \;\; 4 \;\; -7 \;\; 0)^T.$$
   g) $\{(x \; y)^T : \; xy \geq 0, \; x, y \in \mathbb{R}\}$
   h) El conjunto de números racionales.
   i) El conjunto de matrices triangulares superiores 20×20
   j) $\{x : \; x = 3n, \; n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales)
   k) El conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivables.
   l) El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 4, tales que evaluados en cero dan 1.

3. Verifique los Axiomas 2, 3, 7, 8 y 10 en el Ejemplo 1, Pág. 214.

4. Verifique los Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 en el Ejemplo 3, Pág. 215.

5. Dado un espacio vectorial V, demuestre que el elemento neutro de la suma de vectores (Axioma 4) y el opuesto de un vector (Axioma 5) son únicos. [AYUDA: Para cada caso, suponga que existe otro y, usando los axiomas, demuestre que son iguales a los dados por los respectivos axiomas.]

6. Dado un espacio vectorial V, demuestre que $0\mathbf{u}$ y $(-1)\mathbf{u}$, para $\mathbf{u} \in V$, son iguales al elemento neutro de la suma de vectores de V y al opuesto de $\mathbf{u}$, respectivamente. [AYUDA: Use los axiomas y los resultados del ejercicio anterior para probar que $\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.]

7. Geométricamente, ¿Cuáles son los subespacios de $\mathbb{R}^2$? de $\mathbb{R}^3$? de $\mathbb{R}^4$? (En $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 5$, ¿Existen otros tipos de subespacios distintos a los de $\mathbb{R}^4$?)

8. En cada caso, determine si el vector $\mathbf{v}$ es combinación lineal del conjunto de vectores S y en caso de serlo, encuentre los coeficientes de la combinación lineal; diga además si la combinación lineal es única. ¿Qué puede decir del conjunto de vectores dado? [AYUDA: Utilice el Teorema 4, Pág. 226]

   a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\};$

   $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   c) $S = \{1 - x + x^2,\ 2 + x^2,\ -1 + 2x\}, \quad \mathbf{v} = 3 - 2x + 2x^2.$

   d) $S = \{1 - x + x^2 - x^3,\ 2 + x^2,\ 3 + x + x^2 + x^3\}$,
   $\mathbf{v} = 3 - 2x + 2x^2 - x^3$.

   e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\};$

   $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   f) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\};$

   $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

9. Para cada uno de los conjuntos S del Ejercicio 8, escriba el conjunto generado por S. ¿Existe un conjunto de vectores con menor número de ellos que genere el mismo conjunto?

10. Verifique que para todo trio de vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de un espacio vectorial V,
    a) Gen$\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$=Gen$\{\mathbf{u},\ \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$.
    b) Si $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ es *l.i.*, entonces $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{v}-\mathbf{w},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$ también es *l.i.*

11. Verifique que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es combinación lineal del conjunto $\mathcal{M}$ dado en el Ejemplo 13, Pág. 221.

12. Encuentre un conjunto generador, un conjunto *l.d.* y un conjunto *l.i.* de cada uno de los siguientes espacios vectoriales.
    a) $C = \{z = a + bi :\ a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$.
    b) El hiperplano $\mathcal{H} :\ 3x - 2y + w = 0$ de $\mathbb{R}^4$.
    c) $N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :\ A\mathbf{x} = 0\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    d) $S = Gen\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$
    e) $S = Gen\left\{3x - 2x^2,\ 2 + x,\ -4 + x - 2x^2\right\}$
    f) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} :\ A = A^T\}$
    g) $S = \{A = (a_{ij})_{3\times 3} :\ a_{ij} = 0, i \neq j\}$

13. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es *l.i.* En caso negativo, encuentre un vector que sea combinación lineal de los restantes.

    a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

    b) $\left\{3x - 2x^2,\ 2 + x,\ 2x + 2x^2\right\}$.

    c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\right\}$.

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

14. Demuestre que el conjunto $\mathcal{B}$ del Ejemplo 51, Pág. 272, es *l.i.*

15. Encuentre el subespacio más pequeño que contiene cada uno de los conjuntos de vectores dados.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\{3x - 2x^2,\ 2 + x,\ 2x + 2x^2, x^3,\ -2x - 2x^2 + 2x^3\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

16. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es FALSA o VERDADERA y diga por qué

a) Si el determinante de una matriz 5×5 es 3, entonces la matriz tiene máximo 3 columnas que forman un conjunto *l.i.*

b) Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*, entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*

c) Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es un conjunto de vectores *l.d.*, entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto de vectores *l.d.*

d) Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*, entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*

e) Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es un conjunto de vectores *l.d.*, entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ es un conjunto de vectores *l.d.*

f) Un subconjunto finito diferente de $\{\mathbf{0}\}$ **no** puede ser un subespacio vectorial.

g) La unión de dos subespacios vectoriales **de un mismo espacio vectorial** es un subespacio vectorial.

h) La intersección de dos subespacios vectoriales **de un mismo espacio vectorial** es un subespacio vectorial.

i) Si

$$Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\},$$

entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es *l.i.*

j) Si
$$Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\},$$
entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es $l.d.$

k) El conjunto de matrices antisimétricas 3×3 ($A^T = -A$) es un subespacio de $\mathcal{M}_{3\times 3}$

l) El conjunto de puntos dentro de un círculo alrededor del origen de radio 1 es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

m) El conjunto de matrices triangulares inferiores 5×5 con unos en la diagonal es un subespacio de $\mathcal{M}_{5\times 5}$.

n) El conjunto de matrices escalares 4×4 es un subespacio de $\mathcal{M}_{4\times 4}$.

$\tilde{n}$) El conjunto de matrices elementales 10×10 es un subespacio de $\mathcal{M}_{10\times 10}$.

o) El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 5, con coeficientes enteros, es un subespacio de $\mathcal{P}_5$.

p) El conjunto de polinomios de grado igual a 3 es un subespacio de $\mathcal{P}_3$.

17. En cada caso, determine si el conjunto $\mathcal{B}$ es una base del espacio vectorial V.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

c) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

d) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

e) $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$, $V = \mathcal{P}_2$.

f) $\mathcal{B} = \{1 + x, x^2, 1 - x^3\}$, $V = \mathcal{P}_3$.

g) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

h) $\mathcal{B} = \{1 + x,\ x^2\}$, $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 0\}$.

i) $\mathcal{B} = \{1,\ 1 + x^2\}$, $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 0\}$.

18. Demuestre que si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y A es la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_k]$, entonces las columnas de $A^T A$ forman un conjunto *l.i.* y por tanto la matriz $A^T A$ es invertible.

19. Encuentre una base del espacio vectorial dado y determine su dimensión.

a) $H = \{(x\ y\ z\ w)^T : x + y + z + w = 0\}$.

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

c) $K = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 - 2a_1 = 0\}$.

d) El conjunto de matrices simétricas 3×3.

e) $Gen\{1 + x, x^2, 1 - x^3\}$.

f) $Gen\{1 + x, 1 - x, 1 + x^2, 1 - x^2\}$.

20. Explique los por qué de la observaciones planteadas al final del Ejemplo 37, Pág. 255

21. Enuncie y demuestre un teorema que sea una generalización de los Teoremas 21 y 22, Pág. 261. [AYUDA: La primera proposición debe ser: *El número de pivotes de una matriz escalonada equivalente a A es k, donde* $k \leq$ mín$\{m, n\}$ y las demás se deben escribir consecuentemente en términos de k]

22. A partir del conjunto S dado, construya una base del espacio vectorial H que contenga o esté contenida en S.

a) $S = \{(1\ 2\ 3\ 4)^T, (1\ 3\ 5\ 7)^T, (1\ 2\ 4\ 6)^T\}$, $H = \mathbb{R}^4$.

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $H = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

c) $S = \{1 - x^2, 1 + x\}$, $H = \mathcal{P}_2$.

d) $S = \{1 - x^2, 1 + x, 1 - x^3, 1 + x^3, x^2 + x^3\}$, $H = \mathcal{P}_3$.

e) $S = \{(2 \;\; 3 \;\; -2 \;\; -3)^T, (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; -6)^T\}$,
$H = \{(x \; y \; z \; w)^T : \; x + y + z + w = 0\}$.

23. Sea $\mathcal{B} = \{(1\ 2\ 0)^T, (1\ 0\ 5)^T, (0\ 1\ 1)^T\}$, una base de $\mathbb{R}^3$. Observe que, **después de resolver tres sistemas de ecuaciones lineales**, encontramos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(\frac{-10}{7}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(\frac{5}{7}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{-1}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{7}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base usual de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine la matriz de transición de la base usual de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

c) Calcule el vector de coordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector $\mathbf{v} = (1\ 2\ 3)^T$. ¿Es necesaria una matriz de transición para hacer este cálculo? Justifique su respuesta.

d) Calcule el vector $\mathbf{u}$, sabiendo que $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = (1\ 2\ 3)^T$. ¿Es necesaria una matriz de transición para hacer este cálculo? Justifique su respuesta.

24. Justifique que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V, calcule el vector $\mathbf{u}$ cuyas coordenadas en una de las dos bases se dan y calcule las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ en la otra base.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$V = \mathbb{R}^3$,

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V = \mathcal{M}_{2\times 2},\ [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\mathcal{B} = \{2 - x, 1 - x^2, 1 + x\}$, $\mathcal{B}' = \{1 + x, 2 - x, 1 - x^2\}$,

$$V = \mathcal{P}_2,\ [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d) $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathcal{B}' = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, 1 - x^3\}$,

$$V = \mathcal{P}_3,\ [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\},$$

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

25. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathbb{R}^3$, W un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

y A la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$, donde

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule la base $\mathcal{B}$, sabiendo que $\mathcal{B}' = W$.

b) Calcule la base $\mathcal{B}'$, sabiendo que $\mathcal{B} = W$.

26. Conteste las preguntas planteadas al final del Ejemplo 38, Pág. 256.

27. Calcule el rango y la nulidad para cada una de las matrices dadas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

28. Demuestre que el conjunto de vectores formado por las filas, diferentes de $\mathbf{0}$, de una matriz escalonada es $l.i.$ (Complemento de la demostración del Teorema 19, Pág. 260).

29. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es FALSA o VERDADERA y diga por qué

a) Si el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{7\times 9}$ es 7, su nulidad es cero.

b) Si el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{17\times 9}$ es 9, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única.

c) Si el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{7\times 19}$ es 7, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones.

d) Si el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{8\times 10}$ es 7, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede no tener solución.

e) Si la nulidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_{7\times 9}$ es 7, su rango es 2.

f) Si la nulidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_{9\times 9}$ es 0, A es una matriz invertible.

g) Si la nulidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_{27\times 10}$ es 2, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene solución única.

h) Si la nulidad de una matriz $A \in \mathcal{M}_{8\times 7}$ es 3, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente o tiene infinitas soluciones.

30. Verifique si los siguientes conjuntos son ortogonales y si son ortonormales.

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$.

d) $S = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

31. Calcule la proyección de $\mathbf{u}$ en el subespacio H y la componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a H.

a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0, \right\}$.

c) $\mathbf{u} = (1\ 0\ 2 - 1)^T$, $H = \left\{ (x\ y\ z\ w)^T : 2x - y + w = 0, \right\}$.

32. Construya una base ortogonal y una base ortonormal de los espacios vectoriales H del ejercicio anterior.

33. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortogonal de S, entonces

$$Proy_S \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k,$$

y si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base ortonormal de S, entonces

$$Proy_S \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

34. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es FALSA o VERDADERA y diga por qué

    a) La dimensión del espacio de las matrices diagonales 4×4 es 4.

    b) La dimensión de un hiperplano en $\mathbb{R}^5$ es 4.

    c) La dimensión del espacio de los polinomios de grado menor o igual a 4, que evaluados en 1 es 0, es 3.

    d) La dimensión de $Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es 4.

    e) La dimensión de $Gen\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, cuando $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es *l.i.*, es 4.

    f) Las coordenadas de una matriz 3×5 en una base de $\mathcal{M}_{3\times5}$ es un vector de $\mathbb{R}^8$.

    g) Las coordenadas de un vector de un plano en $\mathbb{R}^5$, en una base del plano, es un vector de $\mathbb{R}^2$.

    h) Las coordenadas de un vector de un hiperplano en $\mathbb{R}^5$, en una base de $\mathbb{R}^5$, es un vector de $\mathbb{R}^4$.

    i) Si $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^5$, entonces $dim(Gen\ \mathcal{B}) = 5$.

    j) Dadas P y Q, las matrices de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}''$ y de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$, respectivamente, la ecuación $P[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = Q[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'}$ permite calcular las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ en una base, conociendo las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ en la otra base.

    k) Un conjunto de 5 matrices 3×2 puede generar a $\mathcal{M}_{3\times2}$

    l) Cualquier conjunto de 5 polinomios de grado menor o igual 3 genera a $\mathcal{P}_3$

    m) Un conjunto de 5 vectores de un hiperplano en $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen puede ser *l.i.*

    n) Cualquier conjunto de 5 matrices diagonales 6×6 es *l.i.*

35. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es FALSA o VERDADERA y diga por qué

    a) Si $S = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{t}\} \subset \mathcal{P}_2$, S puede ser un conjunto ortogonal.

    b) Si $S = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{t}\} \subset \mathcal{P}_3$, S puede ser un conjunto ortogonal.

    c) Si $S = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\} \subset V$ es un conjunto ortonormal, entonces $dim\ V \geq 4$.

d) Es posible encontrar un conjunto ortogonal de 3 vectores de un hiperplano en $\mathbb{R}^6$.

e) Para calcular la proyección ortogonal de un vector en un subespacio, se requiere una base ortogonal del subespacio.

f) La proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio es ortogonal al subespacio.

g) La suma de la proyección ortogonal de un vector en un subespacio con la componente del vector ortogonal al subespacio es el vector.

h) Si $\nu(A) = 0$ y A es una matriz 7×4, el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para todo vector $\mathbf{b}$.

i) Una matriz A de tamaño 4×7 no puede tener una nulidad igual a cero.

j) Si el rango de una matriz 5×8 es 5, la nulidad de su transpuesta es 3.

k) El rango de una matriz 5×8 no puede ser 6.

l) Una base del espacio columna de una matriz es la conformada por las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente.

m) Una base del espacio fila de una matriz es la conformada por las filas que tienen pivotes en una matriz escalonada equivalente.

n) La dimensión del espacio fila de una matriz es igual al rango de la matriz.

ñ) Si $\rho(A) = 5$ y A es una matriz 5×9, el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones para todo vector $\mathbf{b}$.

36. Muestre cómo resolver $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, sin calcular A^TA, utilizando la factorización QR de A.

Capítulo 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

5.1. Introducción

Recordemos que una *función* $f : A \longrightarrow B$ es una "regla de asociación" entre los elementos de A y los elementos de B, tal que a cada elemento a de A se le asocia un único elemento b de B al que le llamamos *imagen de* a por medio de f y denotamos $b = f(a)$. A los conjuntos A y B les llamamos *dominio* y *codominio* de f, respectivamente, y al subconjunto de B formado por todas las imágenes de los elementos de A lo llamamos *conjunto imagen* de f y lo denotamos $Im(f)$ (Ver Fig. 5.1). En este capítulo, estamos interesados en el estu-

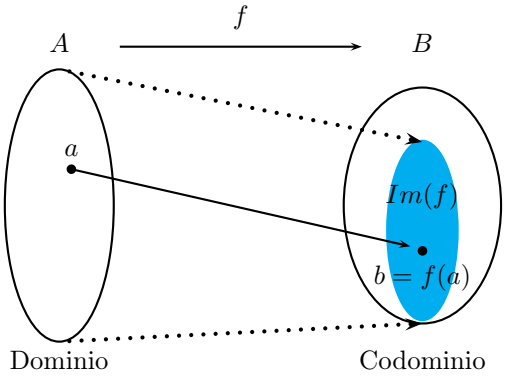


Figura 5.1: Representación de una función

dio de las funciones entre espacios vectoriales que sean "compatibles" con las operaciones de suma y producto por escalar definidas en cada uno de ellos; es decir, que la imagen de una suma de vectores sea la suma de las imágenes y que la imagen de un producto por escalar de un vector sea también un producto por escalar de la imagen del vector.

5.2. Definición y propiedades básicas

Precisemos la idea planteada al final de la introducción con la siguiente definición.

Definición 1 [*Transformación lineal*]. Dados dos espacios vectoriales V y W, diremos que la función $T : V \longrightarrow W$ es una *transformación lineal* de V en W, si y sólo si,

1. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. *(Propiedad aditiva)*
2. $T(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda T(\mathbf{v}_1)$ para todo $\mathbf{v}_1 \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. *(Propiedad homogénea)*

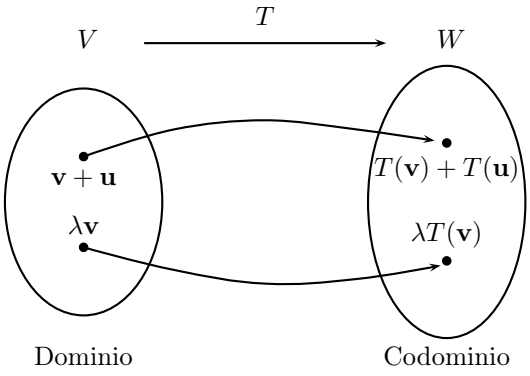


Figura 5.2: Representación de una transformación lineal

Observación: Es importante aclarar que estamos denotando de la misma forma la suma y el producto por escalar definidos tanto en el espacio vectorial V como en el espacio vectorial W, así sean operaciones diferentes. Igualmente, al vector cero de V y al vector cero de W los denotamos igual ($\mathbf{0}$), así sean vectores diferentes.

Ejemplo 1. Consideremos la función $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2z - x \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que T es una transformación lineal.

Veamos que T satisface la *propiedad aditiva*. Sean $(x_1 \;\; y_1 \;\; z_1)^T$ y $(x_2 \;\; y_2 \;\; z_2)^T$ vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] &= T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 2(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 2z_1 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 2z_2 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) \\ (2z_1 - x_1) + (2z_2 - x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 2(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

de donde,

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Para verificar que T satisface la *propiedad homogénea*, tomemos el escalar λ y el vector $(x \; y \; z)^T$. Entonces,

$$T\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x) - 2(\lambda y) \\ 2(\lambda z) - (\lambda x) \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \lambda\begin{pmatrix} x - 2y \\ 2z - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - 2y) \\ \lambda(2z - x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x) - 2(\lambda y) \\ 2(\lambda z) - (\lambda x) \end{pmatrix};$$

de donde,

$$T\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \lambda\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right].$$

□

Ejemplo 2. Sean T: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ y R: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$, tales que

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+c)x + 2bx^2 \quad \text{y} \quad R\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 + ax + 2bx^2.$$

Determinemos si T y R son transformaciones lineales.

Para verificar la *propiedad aditiva* de T, tomemos dos vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^3$, $(a_1 \ \ b_1 \ \ c_1)^T$ y $(a_2 \ \ b_2 \ \ c_2)^T$. Entonces,

$$\begin{aligned} T\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] &= T\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix} \\ &= [(a_1+a_2)+(c_1+c_2)]x + 2(b_1+b_2)x^2 \\ &= [(a_1+c_1)x + 2b_1x^2] + [(a_2+c_2)x + 2b_2x^2] \\ &= T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para verificar que T satisface la *propiedad homogénea*, tomemos el escalar λ y el vector $(a \ \ b \ \ c)^T$. Entonces

$$\begin{aligned} T\left[\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} &= (\lambda a + \lambda c)x + 2\lambda bx^2 \\ &= \lambda[(a+c)x + 2bx^2] = \lambda\left[T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Para verificar la *propiedad aditiva* de R, tomemos dos vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, $(a_1 \ \ b_1)^T$ y $(a_2 \ \ b_2)^T$. Entonces,

$$R\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] = R\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = 1+(a_1+a_2)x+2(b_1+b_2)x^2,$$

pero

$$R\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = (1 + a_1x + 2b_1x^2) + (1 + a_2x + 2b_2x^2)$$
$$= 2 + (a_1 + a_2)x + 2(b_1 + b_2)x^2,$$

de donde,

$$R\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] \neq R\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix};$$

por tanto, T sí es una transformación lineal, pero R no lo es. □

Ejemplo 3. Sean T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}$, R: $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y S: $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}$, tales que

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a+b)\mathbf{d}, \quad R(\lambda\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \lambda + \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S(t\mathbf{d}) = t\mathbf{d}_1 + 3t\mathbf{d}_2.$$

donde $\mathcal{L}$ es la recta $\{x = t\mathbf{d}\}$ y $\mathcal{P}$ es el plano $\{x = \lambda\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2\}$, para

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que T, S y R son transformaciones lineales.

Primero, observemos que T, R y S están definidas sobe sus respectivos dominios y que cada una de ellas tiene las imágenes en sus respectivos codominios.

Para verificar la *propiedad aditiva* de T, tomemos dos vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, $(a\ \ b)^T$ y $(x\ \ y)^T$. Entonces,

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix} = [(a+x) + (b+y)]\mathbf{d}$$
$$= [(a+b)\mathbf{d}] + [(x+y)\mathbf{d}]$$
$$= T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Para verificar la *propiedad homogénea* de T, tomemos el escalar λ y el vector $(a\ \ b)^T$. Entonces,

$$T\left[\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} = [\lambda a + \lambda b]\mathbf{d} = \lambda(a+b)\mathbf{d} = \lambda T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Para verificar la *propiedad aditiva* de R, tomemos dos vectores arbitrarios de $\mathcal{P}$, $(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2)$ y $(\gamma\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2)$, siendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} R\left[(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2) + (\gamma\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2)\right] &= R\left[(\alpha+\gamma)\mathbf{d}_1 + (\beta+\delta)\mathbf{d}_2)\right] \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+\gamma \\ \beta+\delta) \\ \alpha+\gamma+\beta+\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \gamma+\delta \end{pmatrix} \\ &= R(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2 + R(\gamma\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

Para verificar la *propiedad homogénea* de R, tomemos el escalar λ y el vector $(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} R\left[\lambda(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2)\right] &= R\left(\lambda\alpha\mathbf{d}_1 + \lambda\beta\mathbf{d}_2)\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \lambda\alpha+\lambda\beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \lambda R(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

Para verificar la *propiedad aditiva* de S, tomemos dos vectores arbitrarios de $\mathcal{L}$, $\alpha\mathbf{d}$ y $\beta\mathbf{d}$, siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} S(\alpha\mathbf{d} + \beta\mathbf{d}) &= S[(\alpha+\beta)\mathbf{d}] = (\alpha+\beta)\mathbf{d}_1 + 3(\alpha+\beta)\mathbf{d}_2 \\ &= (\alpha\mathbf{d}_1 + 3\alpha\mathbf{d}_2) + (\beta\mathbf{d}_1 + 3\beta\mathbf{d}_2) = S(\alpha\mathbf{d}) + S(\beta\mathbf{d}). \end{aligned}$$

Finalmente, para verificar la *propiedad homogénea* de S, tomemos el escalar λ y el vector $\alpha\mathbf{d}$. Entonces,

$$S\left[\lambda(\alpha\mathbf{d})\right] = S\left(\lambda\alpha\mathbf{d}\right) = \lambda\alpha\mathbf{d}_1 + 3\lambda\alpha\mathbf{d}_2 = \lambda(\alpha\mathbf{d}_1 + 3\alpha\mathbf{d}_2) = \lambda S(\alpha\mathbf{d}).$$

□

Ejemplo 4. Sea A una matriz $m \times n$ y sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determinemos si T es una transformación lineal.

Por el Teorema 2 del Capítulo 2, Pág. 59, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

y

$$T(\lambda\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda T(\mathbf{x}),$$

de donde concluimos que T es una transformación lineal. □

A las transformaciones lineales como la del Ejemplo 4, las llamamos *transformaciones matriciales*. Veremos que todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son matriciales. Por ejemplo, notemos que la transformación lineal del Ejemplo 1 es una transformación matricial:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2z-x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y por el resultado del Ejemplo 4, esto seria suficiente para demostrar que T es una transformación lineal.

Ejemplo 5. Verifiquemos que la función que a cada punto de $\mathbb{R}^2$ le asigna el punto de su reflexión a través del Eje X es una transformación lineal.

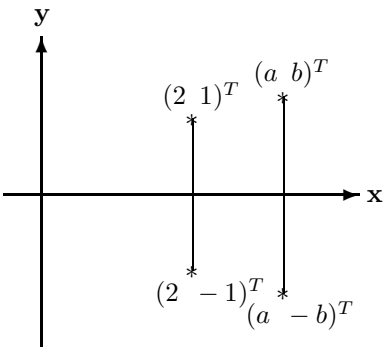


Figura 5.3: Reflexión a través del Eje X en el plano

De la Figura 5.3, es fácil ver que la función en cuestión es $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

lo que muestra que T es una transformación matricial y, por el resultado del Ejemplo 4, T es una transformación lineal. □

Ejemplo 6. Sea $T : V \longrightarrow W$ la función tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Verifiquemos que T es una transformación lineal.

Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ vectores de V. Por ser V un espacio vectorial, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está en V y por tanto, $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$. De otro lado, $T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, de donde concluimos que la propiedad aditiva se satisface. Queda como ejercicio para el lector verificar la propiedad homogénea (Ejercicio 2). A esta transformación lineal la llamamos *transformación nula*. □

Ejemplo 7. Sea $T : V \longrightarrow V$ la función tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Es fácil verificar que T es una transformación lineal, lo que dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 3). A esta transformación lineal la llamamos *transformación idéntica*. □

Podemos ver que las propiedades que caracterizan a una transformación lineal nos permiten demostrar que la imagen de una combinación lineal de vectores por medio de una transformación lineal es la combinación lineal de las imágenes de los vectores con los mismos escalares de la combinación lineal inicial. La demostración, la cual dejamos como ejercicio para el lector, consiste básicamente en aplicar la propiedad aditiva iteradamente y luego aplicar la propiedad homogénea a cada sumando (Ejercicio 5).

Teorema 1 [*Transformación lineal de combinaciones lineales*]. Sean $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores de V y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares de $\mathbb{R}$. Entonces,

$$T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n).$$

De este resultado, se tiene trivialmente que una transformación lineal asigna al vector cero del dominio, el vector cero del codominio y, por su importancia, lo enunciamos en el siguiente corolario (Ejercicio 6).

Corolario 1.1 [*Condición necesaria de una transformación lineal*]. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

El Teorema 1 también establece que, para el caso de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, las rectas son enviadas en rectas o puntos y los planos son enviados en planos, rectas o puntos (Ejercicio 9). Adicionalmente, el Teorema 1 permite demostrar que una transformación lineal asigna a un subespacio de dimensión k del dominio, un

subespacio del codominio de dimensión igual o menor a k (Ejercicio 10).

Recordemos que dos funciones definidas sobre un mismo dominio y codominio son iguales, si y sólo si, tienen las mismas imágenes para todos y cada uno de los elementos del dominio. Aunque una transformación lineal es una función, sus características especiales simplifican enormemente la propiedad de igualdad entre transformaciones lineales, como lo expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 2 [*Caracterización de la igualdad de transformaciones lineales*].
Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V y $T : V \longrightarrow W$ y $S : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales.

$$T = S, \text{ si y sólo si,}$$
$$S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n).$$

Demostración: Por la igualdad entre funciones, es claro que si $T = S$, las imágenes de los elementos de la base bajo las dos transformaciones son iguales. Para demostrar la otra implicación, recordemos que como $\mathcal{B}$ es una base de V, para cada vector $\mathbf{v}$ de V, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$. Por el Teorema 1 y la igualdad de las imágenes de los elementos de la base bajo las dos transformaciones, tenemos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_1 S(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 S(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n S(\mathbf{v}_n) \\ &= S(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= S(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

□

Por los teoremas anteriores, es fácil ver que si conocemos la imagen de cada uno de los elementos de una base del dominio de una transformación lineal, podemos conocer la imagen de cualquier otro vector del dominio. En otras palabras, una transformación lineal queda completamente determinada por las imágenes de cada uno de los elementos de una base del dominio, como lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 3 [*Determinación de una transformación lineal*].
Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial V, existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, tal que $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1), \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}_n)$, con $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$.

Demostración: Tenemos que $\mathcal{B}$ es una base de V, por lo tanto, para cualquier vector $\mathbf{v}$ de V existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$. Si sabemos que $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2)$, $\ldots$, $\mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}_n)$, podemos encontrar la imagen de cualquier vector $\mathbf{v}$ de V. En efecto, por el Teorema 1,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

Nos queda por demostrar la unicidad de esta transformación. Supongamos que existen dos transformaciones lineales T_1 y T_2 tales que $T_1(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i = T_2(\mathbf{v}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por el Teorema 2, T_1 y T_2 son la misma transformación lineal. □

Ejemplo 8. Sea $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$T(1) = (1 \;\; 0 \;\; 0)^T,\; T(x) = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T \text{ y } T(x^2) = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T.$$

Calculemos $T(a + bx + cx^2)$. Dado que $\{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_2$, $a + bx + cx^2 = a\,(1) + b\,(x) + c\,(x^2)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(a + bx + cx^2) &= a\,T(1) + b\,T(x) + c\,T(x^2) \\ &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 9. Dados los vectores $\mathbf{u}_1 = (-1 \;\; 3 \;\; -2)^T$ y $\mathbf{u}_2 = (2 \;\; 0 \;\; 1)^T$ de $\mathbb{R}^3$, encontremos una transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en el plano $H = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = t\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_2, t, s \in \mathbb{R}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Si tomamos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y dos vectores arbitrarios de H (no necesariamente diferentes), por ejemplo, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, podemos definir $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1$ y $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2$, de tal manera que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = x\,T(\mathbf{e}_1) + y\,T(\mathbf{e}_2)$$
$$= x\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 3x \\ -2x+y \end{pmatrix}.$$

¿Existe otra transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en el plano H? □

5.3. Espacios vectoriales asociados a una transformación lineal

Definimos ahora, dos conjuntos asociados a una transformación lineal, los cuales resultan ser Espacios Vectoriales fundamentales para determinar propiedades de este tipo especial de funciones.

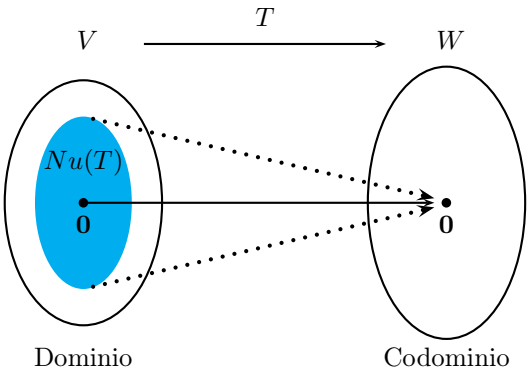


Figura 5.4: Representación del núcleo de una transformación lineal

Definición 2 [*Núcleo de una transformación lineal*]. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, definimos $Nu(T)$, el *núcleo de* T, como el conjunto de todos los vectores de V cuya imagen es el vector $\mathbf{0}$ de W. En otras palabras,

$$Nu(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Definición 3 [*Imagen de una transformación lineal*]. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, definimos $Im(T)$, la *imagen de* T, como el conjunto de todos los vectores $\mathbf{w}$ de W para los cuales existe un vector $\mathbf{v}$ de V, tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. En otras palabras,

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W : \text{ existe } \mathbf{v} \in V \text{ tal que } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

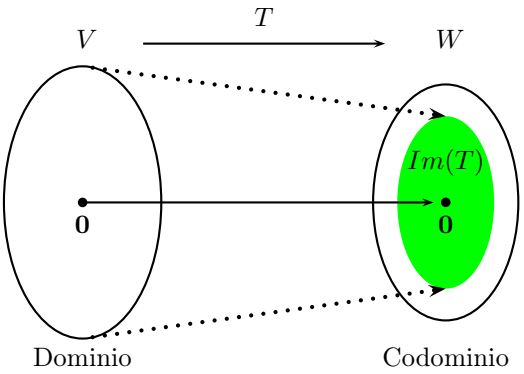


Figura 5.5: Representación de la imagen de una transformación lineal

Ejemplo 10. Identifiquemos el núcleo y la imagen de la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$, tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

Como $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ implica que $a = b = 0$ y $c = -d$, concluimos que

$$\begin{aligned} Nu(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = 0,\ b = 0,\ c = -d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r & r \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Como las únicas matrices que son imágenes bajo T tienen la forma $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$ (en efecto, $T\begin{pmatrix} r & s \\ t-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$), tenemos que $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$. □

Ejemplo 11. Identifiquemos el núcleo y la imagen de $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la transformación lineal del Ejemplo 8.

Como vimos en el Ejemplo 8, $T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}$, de tal forma que $T(a+bx+cx^2) = \mathbf{0}$ implica que $a = b = c = 0$ y que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es imagen bajo T (en efecto, $T((p-q)+(q-r)x+rx^2) = (p \;\; q \;\; r)^T$, para cualquier vector $(p,q,r)^T \in \mathbb{R}^3$), por lo tanto, $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $Im(T) = \mathbb{R}^3$. □

Como ocurrió con los conjuntos asociados a una matriz, los conjuntos asociados a una transformación lineal que acabamos de definir también son espacios vectoriales. En efecto, el núcleo de una transformación es un subespacio del dominio de la transformación y la imagen de una transformación es un subespacio del codominio de la transformación, lo cual demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 4 [*Subespacios asociados a una transformación lineal*]. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

1. $Nu(T)$ es subespacio vectorial de V.
2. $Im(T)$ es subespacio vectorial de W.

Demostración: Por el Teorema 1 del Capítulo 4, Pág. 217, un subconjunto H no vacío de un espacio vectorial es un subespacio vectorial, si y sólo si, los elementos de H satisfacen las propiedades clausurativas para la suma y el producto por escalar (Axiomas 1 y 6 de la definición de espacio vectorial, Pág. 212).

1. Por el Corolario 1.1, Pág. 302, el vector $\mathbf{0}$ es un elemento de $Nu(T)$, así que $Nu(T)$ es no vacío. De otro lado, si tomamos dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $Nu(T)$ y un escalar λ, tenemos que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, de modo que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ T(\lambda\mathbf{u}) &= \lambda T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\lambda\mathbf{u}$ están en $Nu(T)$ y por lo tanto, $Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V.

2. De nuevo, por el Corolario 1.1, el vector $\mathbf{0}$ es un elemento de $Im(T)$, así que $Im(T)$ es no vacío y si tomamos dos vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ de $Im(T)$ y un escalar λ, tenemos que existen $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, vectores de V tales que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ y $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ \lambda\mathbf{w}_1 &= \lambda T(\mathbf{v}_1) = T(\lambda\mathbf{v}_1), \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ y $\lambda\mathbf{w}_1$ están en $Im(T)$ y por lo tanto, $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W. □

Observemos que, por el Teorema 1, Pág. 302, si conocemos S, un conjunto generador del dominio de una transformación T, una forma de encontrar un conjunto generador de $Im(T)$, la imagen de la transformación T, es calculando las imágenes de los elementos de S (Ejercicio 8). En efecto, dada $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, Si $V = Gen\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\}$, entonces

$$Im(T) = Gen\{T(\mathbf{v}_1),\ T(\mathbf{v}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{v}_n)\}. \tag{5.1}$$

5.4. Matriz asociada a una transformación lineal

Ya sabemos que una transformación lineal queda completamente determinada por la forma como la transformación actúa en una base del dominio y que la función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para una matriz $m \times n$ dada es una transformación lineal, la cual llamamos *transformación matricial*. En esta sección, demostraremos que toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita puede ser *representada* como una transformación matricial. Con este propósito, dadas una base del dominio y una base del codominio, para cada transformación lineal, definamos una matriz asociada a ella, como la matriz cuyas columnas son las coordenadas en la base del codominio de las imágenes bajo la transformación de los elementos de la base del dominio.

Definición 4 [*Matriz asociada a una transformación lineal respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$*]. Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ y las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, definimos como *matriz asociada a la transformación lineal T respecto a las bases $\mathcal{B}$* y $\mathcal{B}'$ a la matriz

$$[A_T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left[[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}'}\ [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{B}'}\right].$$

Mientras no haya necesidad de aclarar, denotaremos simplemente por A_T a la matriz asociada a la transformación lineal, respecto a las bases dadas.

Ejemplo 12. Sean $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}$ y R la transformación lineal del Ejemplo 3, Pág. 299; además, sean $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathcal{P}_2$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Encontremos tanto la matriz asociada a la transformación T, respecto a las bases dadas, como una matriz asociada a la transformación R en las bases que escojamos.

Calculemos la matriz asociada a la transformación T. Como $\mathcal{B}'$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^2$ coinciden con el vector; por lo tanto, tenemos que $T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [T(1)]_{\mathcal{B}'}$, $T(1+x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [T(1+x)]_{\mathcal{B}'}$ y $T(1+x-x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = [T(1+x-x^2)]_{\mathcal{B}'}$, de donde la matriz asociada a T respecto a las bases dadas es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ahora calculemos una matriz asociada a la transformación R. Por conveniencia (facilidad en los cálculos), tomemos como base de $\mathcal{P}$ los vectores directores del plano $\mathcal{P}$ y como base de $\mathbb{R}^3$ tomemos la base usual de $\mathbb{R}^3$. Calculemos $R(d_1)$ y $R(d_2)$, puesto que A_R, la matriz asociada a R en estas bases, es $A_R = [R(d_1)\ \ R(d_2)]$. Por la definición de R, tenemos que $R(d_1) = R(1d_1 + 0d_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R(d_2) = R(0d_1 + 1d_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto, $A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.[1] □

Ejemplo 13. Calculemos la matriz asociada, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, a la transformación lineal S, que a cada vector del plano cartesiano lo rota 90º en el sentido de las manecillas del reloj.

[1] Observemos que A_R es una matriz 3×2 puesto que la dimensión del dominio de R es 2 y la del codominio es 3

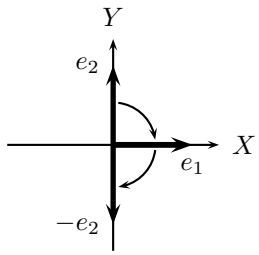


Figura 5.6: Rotación de 90^o en el plano ($\mathbb{R}^2$)

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Por la definición de S y la Figura 5.6, $S(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2$ y $S(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$; por lo tanto, la matriz asociada a S respecto a la base canónica es

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Podemos ver que la matriz asociada a una transformación lineal permite expresar el vector de coordenadas de la imagen de cualquier vector, en términos de su vector de coordenadas respecto a la base del dominio, de tal manera que, en términos de los vectores de coordenadas, todas las transformaciones lineales resultan ser matriciales, como lo resumimos en la siguiente propiedad de la matriz asociada a una transformación lineal y lo ilustramos en el diagrama de la Figura 5.7.

Teorema 5 [*Caracterización de la matriz asociada a una transformación lineal*].
Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, con V y W espacios vectoriales de dimensión finita y las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, A_T, la matriz asociada a la transformación T respecto de estas bases, es la única matriz tal que, para todo $\mathbf{v} \in V$,

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Demostración: Si $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_n)^T$, entonces $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ y por el Teorema 1, Pág. 302, $T(\mathbf{v}) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n)$. De donde, por el Teorema 14 del Capítulo 4, Pág. 243, la combinación lineal se conserva para los vectores de coordenadas respectivos respecto a una misma base; es decir,

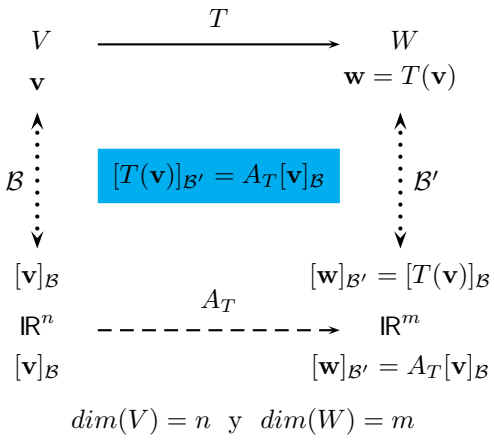


Figura 5.7: Caracterización de la matriz asociada a una transformación lineal

$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = \lambda_1[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}'} + \lambda_2[T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}'} + \ldots + \lambda_n[T(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{B}'}$. Así que, por definición de $A\mathbf{x}$, Pág. 58, tenemos que

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

La demostración de la unicidad se deja como ejercicio para el lector (Ejercicio 16). □

Ejemplo 14. Ilustremos el teorema anterior con la transformación lineal y las bases del Ejemplo 12.

Si $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son bases de $\mathcal{P}_2$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, la matriz asociada a la transformación, respecto a las bases dadas es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. De otro lado, puesto que la base $\mathcal{B}'$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $[T(a+bx+cx^2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}$ y, de la igualdad polinómica $a + bx + cx^2 = \lambda_1(1) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x - x^2)$, tenemos que $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = b + c$ y $\lambda_3 = -c$, así que $[a + bx + cx^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a-b \\ b+c \\ -c \end{pmatrix}$.

Finalmente, comprobamos que $[T(a+bx+cx^2)]_{\mathcal{B}'} = A_T[a+bx+cx^2]_{\mathcal{B}}$, ya que

$$\begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ b+c \\ -c \end{pmatrix}.$$

□

El hecho de que, fijadas las bases del dominio y codominio de una transformación lineal, la transformación tenga una matriz asociada, nos permite establecer las siguientes relaciones entre el espacio nulo de dicha matriz y el núcleo de la transformación y entre el espacio columna de dicha matriz y la imagen de la transformación.

Teorema 6 [*Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas*]
Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, con V y W espacios vectoriales de dimensión finita, y las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, si A_T es la matriz asociada a la transformación respecto a las bases dadas, entonces

1. $\mathbf{v} \in Nu(T)$, si y sólo si, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in N_{A_T}$ (Fig. 5.8-izquierda)
2. $\mathbf{w} \in Im(T)$, si y sólo si, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} \in C_{A_T}$ (Fig. 5.8-derecha)

Demostración:

1. Tenemos que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v} \in Nu(T) & \text{si y sólo si} & T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W \\ & \text{si y sólo si} & [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{0} \quad \text{(Teorema 14, Capítulo 4, Pág. 243)} \\ & \text{si y sólo si} & A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad \text{(Teorema 5)} \\ & \text{si y sólo si} & [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in N_{A_T}\ . \end{array}$$

2. Similarmente,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{w} \in Im(T) & \text{si y sólo si} & \text{existe } \mathbf{v} \in V \text{ tal que } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \\ & \text{si y sólo si} & [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{(Teorema 5)} \\ & \text{si y sólo si} & [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} \in C_{A_T}\ . \end{array}$$

□

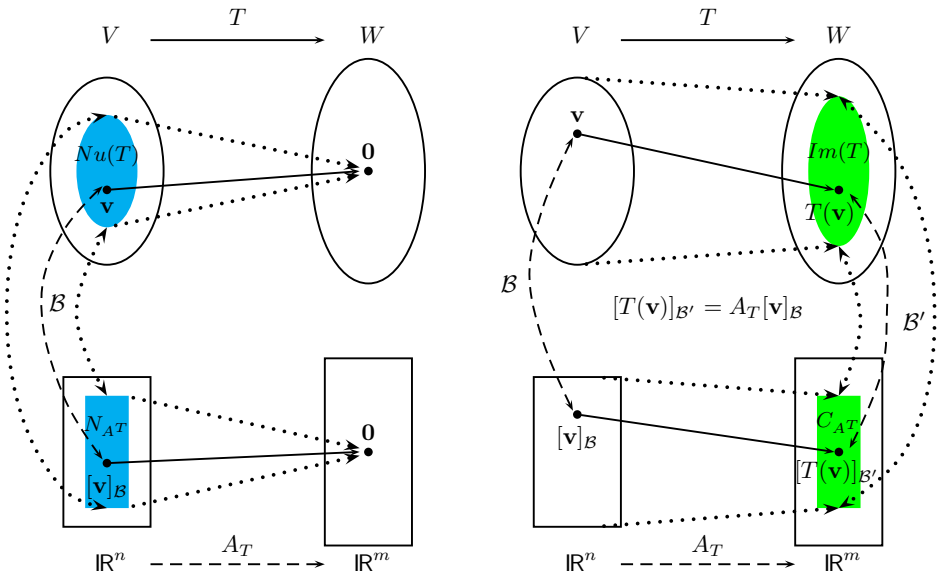


Figura 5.8: Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas ($dim\, V = n$ y $dim\, W = m$)

Ejemplo 15. Calculemos $Im(T)$ y $Nu(T)$, para $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & b-c \\ c+a & a+c \end{pmatrix}$.

Por el resultado del Teorema 6, podemos calcular la imagen y el núcleo de T directamente de su definición o a través del espacio columna y del espacio nulo de una matriz asociada a la transformación. Como ya vimos cómo hacerlo directamente (Ejemplos 10 y 11, Pág. 306), calculemos $Im(T)$ y $Nu(T)$ usando una matriz asociada a T.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}$, respectivamente. La matriz asociada a la transformación, respecto a estas bases es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Ver Ejemplo 12, Pág. 309, para recordar como se calcula esta matriz). Ahora, calculemos C_{A_T} y N_{A_T} como lo hicimos en el Capítulo 4 (Ejemplos 36 y 37, Pág. 255). Escalonando la matriz

A_T, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$C_{A_T} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } N_{A_T} = Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

puesto que las dos primeras columnas de A_T forman una base de C_{A_T} y N_{A_T} es la solución del sistema homogéneo $A_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Finalmente, calculando los vectores de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que tienen como componentes, en las bases canónicas, los vectores de los conjuntos generadores de N_{A_T} y C_{A_T}, tendremos los conjuntos generadores de $Nu(T)$ y $Im(T)$, respectivamente. Esto es

$$Im(T) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } Nu(T) = Gen\{-1+x+x^2\}$$

□

Es importante que resaltemos que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y A_T es una matriz asociada a T unas bases dadas de V y W, $Nu(T)$ es un subespacio de V, el dominio de T, y que N_{A_T} es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ $(n = dim\, V)$, de tal manera que si $\mathbf{v} \in Nu(T)$, el vector que está en N_{A_T} es el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base dada de V, no $\mathbf{v}$. Similarmente, $Im(T)$ es un subespacio de W, el codominio de T, y C_{A_T} es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ $(m = dim\, W)$ y si $\mathbf{w} \in Im(T)$, el vector que está en C_{A_T} es el vector de coordenadas de $\mathbf{w}$ respecto a la base dada de W, no $\mathbf{w}$. Sin embargo, debemos notar que las dimensiones de $Nu(T)$ e $Im(T)$ coinciden con las de N_{A_T} y C_{A_T} y por consiguiente, si llamamos $\kappa(T) = dim(Nu(T))$, la nulidad de T, y $\tau(T) = dim(Im(T))$, el rango de T, tenemos que

$$\kappa(T) + \tau(T) = dim(V), \tag{5.2}$$

cuya demostración dejamos como ejercicio al lector (Ejercicio 17).

Ejemplo 16. Calculemos el rango y la nulidad de $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{P}_1$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - 2b + (a + 2c + 3d)x.$$

Con base en el Teorema 6 y la observación que precede la Ecuación (5.2), para calcular el rango y la nulidad de T, basta calcular el rango y la nulidad de una matriz asociada a T.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $\mathcal{P}_1$, respectivamente. La matriz asociada a la transformación, respecto a estas bases es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (Ver Ejemplo 12, Pág. 309, para recordar como se calcula esta matriz). Ahora, calculemos el rango y la nulidad de A_T como lo hicimos en el Capítulo 4 (Ejemplos 36 y 37, Pág. 255). Escalonando la matriz A_T, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, el rango y la nulidad de A_T son ambos iguales a 2, puesto que esta última matriz tiene 2 columnas pivotales y 2 columnas no pivotales. En consecuencia, tanto el rango como la nulidad de T es 2. □

Cuando la transformación lineal va de un espacio vectorial en si mismo y tomamos la misma base, tanto en el dominio como en el codominio, hablaremos simplemente de la matriz asociada a la transformación lineal respecto a la base. Así, por ejemplo, cuando tenemos la transformación idéntica, la matriz asociada resulta ser la matriz idéntica, independientemente de la base que se tome (Ejercicio 22).

De otro lado, para una transformación lineal que va de un espacio vectorial en si mismo, por cada base que se tome, hay una matriz asociada a la misma transformación lineal. En el siguiente teorema, establecemos una relación entre dos matrices asociadas a una misma transformación lineal y la matriz de transición entre las dos bases.

Teorema 7 [*Relación entre dos matrices asociadas a una transformación lineal*].
Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, con V un espacio vectorial de dimensión n y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de V. Si P es la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, A_T es la matriz asociada a T respecto a $\mathcal{B}$ y A'_T es la matriz asociada a T respecto a $\mathcal{B}'$, entonces

$$A'_T P = P A_T. \tag{5.3}$$

Demostración: Si P es la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = P[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$, para todo $\mathbf{w} \in V$ y, en particular, $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = P[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$, para todo $\mathbf{v} \in V$. De otro lado, como A_T es la matriz asociada a T respecto

a la base $\mathcal{B}$, $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$; así que

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = P[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = P(A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) = (PA_T)[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \ .$$

Por el Teorema 16 del Capítulo 4, Pág. 247, P^{-1} es la matriz de transición de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Por tanto,

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = (PA_T)[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (PA_T)(P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}) = (PA_TP^{-1})[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}.$$

Finalmente, por el Teorema 5, (PA_TP^{-1}) es la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}'$. Como la matriz asociada a T es única,

$$A'_T = PA_TP^{-1},$$

de donde se sigue la Ecuación (5.3), que es lo que queríamos demostrar (Ver ilustración en la Figura 5.9). □

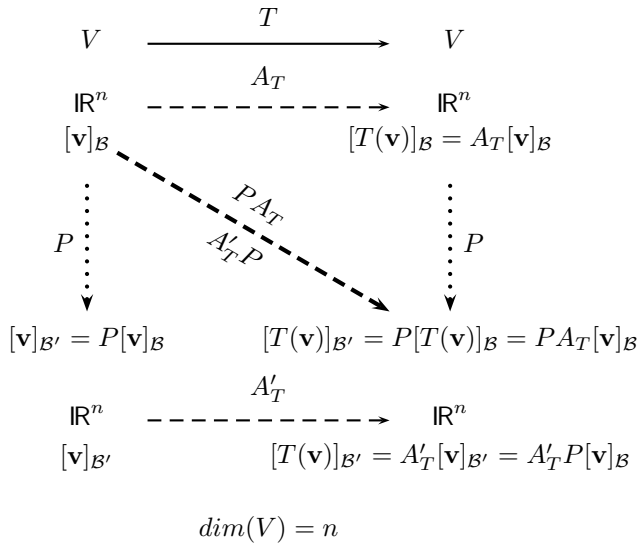


Figura 5.9: Relación entre dos matrices asociadas a una transformación lineal

Ejemplo 17. Ilustremos el teorema anterior con la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \text{ y las bases } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y}$$
$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por ser $\mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De otro lado, tenemos que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así que, la matriz asociada a T respecto a $\mathcal{B}$ es

$$A_T = \left[\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, tenemos que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

es decir,

$$\left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz asociada a T, respecto a $\mathcal{B}'$ es

$$A'_T = \left[\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$PA_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A'_T P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

obteniéndose lo que establece el Teorema 7 (Ecuación 5.3). □

Todas las matrices asociadas a una misma transformación lineal (pero respecto a una base diferente) satisfacen la ecuación (5.3) para alguna matriz invertible (que resulta ser la matriz de transición entre las bases). A las matrices que satisfacen esta ecuación las llamamos *matrices semejantes*, como lo establece la siguiente definición.

Definición 5 [*Matrices semejantes*]. Dadas dos matrices $n \times n$, A y B, decimos que A y B son matrices semejantes, si y sólo si, existe una matriz invertible P, tal que $BP = PA$ o lo que es lo mismo, $B = PAP^{-1}$.

Ejemplo 18. En el Ejemplo 17, las matrices A_T y A'_T son semejantes. □

5.5. Isomorfismos

Aunque existen muchísimos espacios vectoriales, veremos que muchos de ellos son "esencialmente el mismo" respecto a la estructura de espacio vectorial. En esta sección, nos ocuparemos de analizar este concepto de similitud, para lo cual utilizaremos las propiedades de tres tipos de transformaciones lineales especiales, cuyas definiciones damos a continuación.

Definición 6 [*Transformación lineal inyectiva*]. Diremos que $T : V \longrightarrow W$ es una *transformación lineal inyectiva*, si y sólo si, para cada $\mathbf{w}$ de $Im(T)$, existe un único $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. (Ver Fig. 5.10)

Una forma de mostrar esta unicidad es suponer que $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$ y demostrar que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ (Ejercicio 23).

Ejemplo 19. Determinemos si la transformación lineal del Ejemplo 10, Pág. 306, es inyectiva.

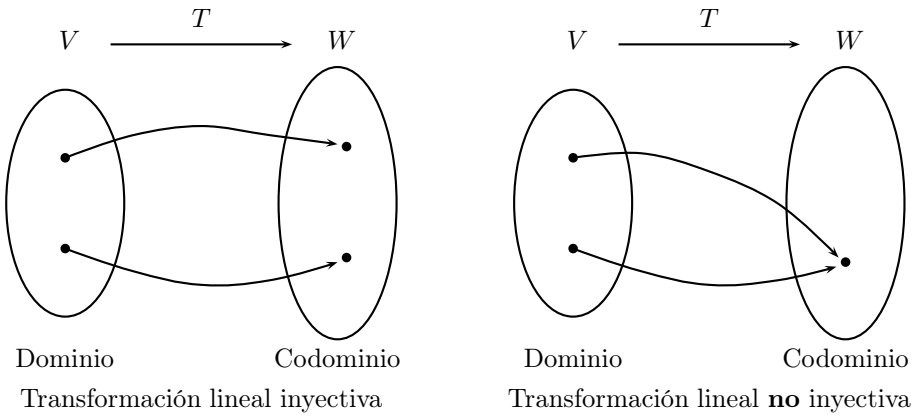


Figura 5.10: Esquema de una transformación lineal inyectiva y de una **no** inyectiva

Es fácil ver que la transformación lineal no es inyectiva, ya que, por ejemplo,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Ejemplo 20. Verifiquemos que la transformación lineal del Ejemplo 8, Pág. 304, es una transformación lineal inyectiva.

Tenemos que demostrar que si $T(a_1+b_1x+c_1x^2) = T(a_2+b_2x+c_2x^2)$, entonces $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$, lo que es fácil de concluir al resolver la ecuación vectorial $\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ b_1+c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+b_2+c_2 \\ b_2+c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. □

Como lo habíamos mencionado al definir el núcleo y la imagen de una transformación lineal, conocer estos subespacios vectoriales nos permite identificar algunas propiedades de la transformación. Veamos algunas de ellas.

Teorema 8 [*Caracterización de una transformación lineal inyectiva*].
Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. La transformación T es inyectiva, si y sólo si,

$$Nu(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

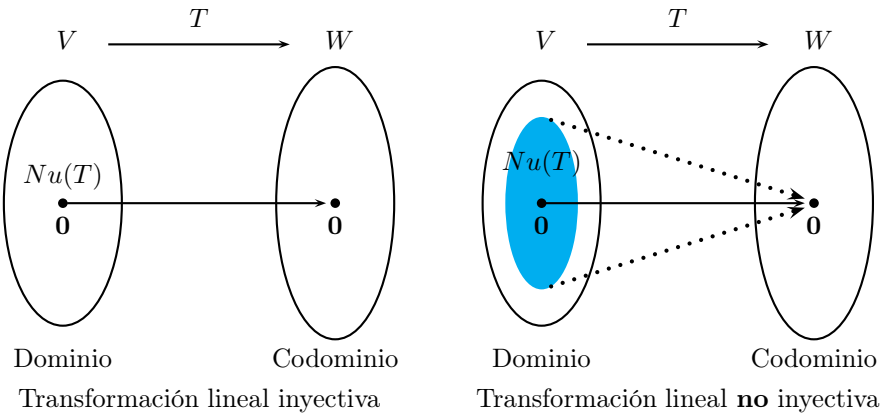


Figura 5.11: Caracterización de una transformación lineal inyectiva

Demostración: Supongamos que T es una transformación lineal inyectiva. Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, por la inyectividad de T, el vector $\mathbf{0}$ tiene que ser el único elemento de $Nu(T)$, por tanto $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Demostremos la implicación contraria. Supongamos que $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ y veamos que si $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Como $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, entonces $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, lo que implica que $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in Nu(T)$. Pero, como $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y por tanto $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

□

Un resultado bastante útil, que consignaremos en el siguiente teorema, es el que las transformaciones lineales inyectivas envían conjuntos de vectores *l.i.* en conjuntos de vectores *l.i.*; así, conocida una base del dominio, podemos encontrar una base del espacio imagen de la transformación lineal.

Teorema 9 [*Independencia lineal y transformaciones lineales inyectivas*].
Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*

Demostración: Supongamos que $\lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Por el Teorema 1, Pág. 302, $T(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Como T es inyectiva, $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, lo que implica, por la independencia lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$,

por lo tanto, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es un conjunto de vectores *l.i.* □

Definición 7 [*Transformación lineal sobreyectiva*]. Diremos que $T : V \longrightarrow W$ es una *transformación lineal sobreyectiva*, si y sólo si, $Im(T) = W$ (Ver Fig. 5.12).

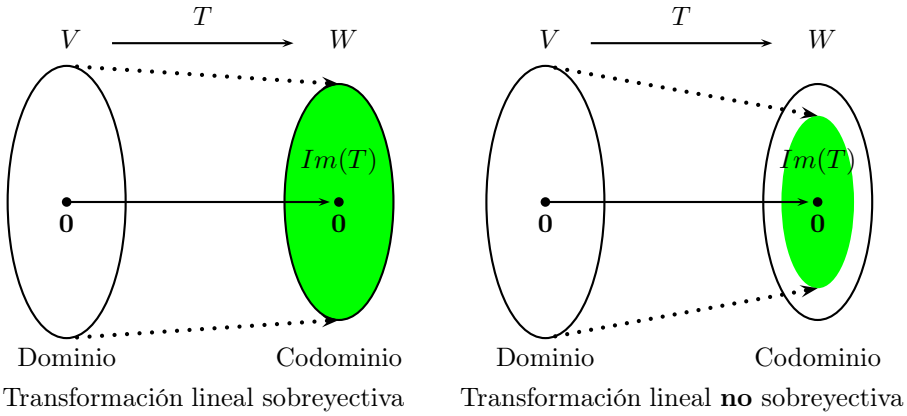


Figura 5.12: Esquema de una transformación lineal sobreyectiva y de una **no** sobreyectiva

Ejemplo 21. Determinemos si la transformación lineal del Ejemplo 10, Pág. 306, es sobreyectiva.

Dado que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$, es fácil ver que para que una matriz esté en la imagen de T, la componente (2,1) debe ser 0, lo que nos indica que $Im(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}$ y por tanto, T no es una transformación lineal sobreyectiva. □

Ejemplo 22. Verifiquemos que la transformación lineal T del Ejemplo 12, Pág. 309, es sobreyectiva.

Tenemos que verificar que, para cualquier vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, existe un polinomio $(a + bx + cx^2) \in \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, para lo cual basta con tomar $c = v$ y, a y b tales que $a - b = u$. □

Con base en la observación planteada al final de la Sección 5.3, Pág. 308, (ver expresión 5.1), es fácil demostrar que si T es una transformación lineal sobreyectiva, la imagen mediante T de un conjunto generador del dominio es un conjunto generador del codominio (Ejercicio 25). En efecto, dada $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal sobreyectiva,

$$\text{Si } V = Gen\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\},\ \text{entonces}$$
$$W = Gen\{T(\mathbf{v}_1),\ T(\mathbf{v}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{v}_n)\}. \quad (5.4)$$

Con los conceptos de inyectividad y sobreyectividad y los resultados hasta ahora obtenidos, podemos ver que si una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W es tanto inyectiva, como sobreyectiva (*isomorfismo*), es porque tienen esencialmente la misma estructura de espacio vectorial; en otra palabras, son "esencialmente los mismos" (*isomorfos*) como lo expresamos en las siguientes definiciones.

Definición 8 [*Isomorfismo*]. Diremos que una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un *isomorfismo*, si y sólo si, T es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva[2] (Ver Figs. 5.13 y 5.14).

Definición 9 [*Espacios vectoriales isomorfos*]. Si dados dos espacios vectoriales V y W, existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$, diremos que V y W son isomorfos, lo cual denotamos $V \cong W$.

Ejemplo 23. Determinemos si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$ es un *isomorfismo*.

Debemos determinar si T es inyectiva, y en caso de serlo, determinar si también es sobreyectiva. Para determinar si T es inyectiva supongamos que

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a_1 + b_1x + c_1x^2 = T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = a_2 + b_2x + c_2x^2$$

[2]Otro nombre que se utiliza para las transformaciones lineales que son inyectivas y sobreyectivas es el de *biyectivas*.

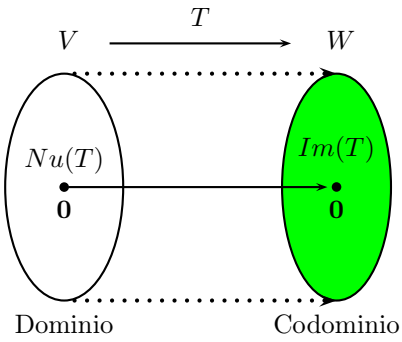


Figura 5.13: Esquema de un isomorfismo y de espacios isomorfos

de donde, por igualdad de polinomios, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$, lo que implica que T es inyectiva.

Ahora, al tomar un polinomio arbitrario $a + bx + cx^2$, podemos mostrar un elemento de $\mathbb{R}^3$, en este caso, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tal que $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$ lo que implica que T es sobreyectiva y por lo tanto, T es un isomorfismo y por la Definición 9, podemos concluir que $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2$ son isomorfos ($\mathbb{R}^3 \cong \mathcal{P}_2$).

□

Ejemplo 24. La transformación lineal del Ejemplo 10, Pág. 306, resultó no ser sobreyectiva (Ejemplo 21, Pág. 321); por tanto, no es un isomorfismo. □

Cuando el dominio y el codominio tienen la misma dimensión, cualquier transformación lineal que sea inyectiva o sobreyectiva resulta ser un isomorfismo, lo cual demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 10 [*Inyectividad y sobreyectividad en espacios de igual dimensión*].
Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, con V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $dim(V) = dim(W)$, entonces

1. si T es inyectiva, T es sobreyectiva.
2. si T es sobreyectiva, T es inyectiva.

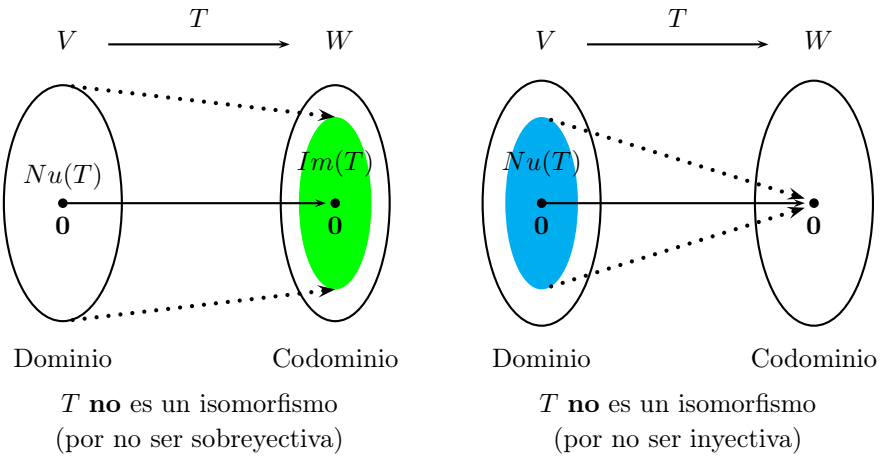


Figura 5.14: Esquema de transformaciones lineales que no son isomorfismos

Demostración:

1. Si T es inyectiva y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, entonces, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $Im(T)$, por los Teoremas 1 y 9, Págs. 302 y 320. Así que $dim(V) = \tau(T) = dim(Im(T))$. Como por hipótesis, $dim(W) = dim(V)$, entonces $dim(W) = dim(Im(T))$; por el Teorema 13 del Capítulo 4, Pág. 240, $W = Im(T)$, de donde concluimos que T es sobreyectiva.

2. Si T es sobreyectiva, entonces $\tau(T) = dim(W)$. Como por hipótesis $dimV = dimW$, de la ecuación (5.2), que se deriva del Teorema 6, Pág. 312, tenemos que $\kappa(T) = 0$; es decir, $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$, de donde podemos concluir, por el Teorema 8, que T es inyectiva.

□

El que dos espacios vectoriales sean isomorfos está íntimamente relacionado con la dimensión de ellos, ya que entre dos espacios de igual dimensión siempre se puede construir una transformación lineal tal que a cada vector de una base del dominio le asigna un vector (diferente) de una base del codominio, la cual resulta ser un isomorfismo, como veremos en la demostración del siguiente resultado.

Teorema 11 [*Isomorfismo y dimensión*].
Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$dim(V) = dim(W), \quad \text{si y sólo si,} \quad V \cong W\,.$$

Demostración: Supongamos que $V \cong W$, entonces existe un isomorfismo $T : V \to W$, de tal manera que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, por ser T una transformación lineal inyectiva,

$$\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$$

es una base de $Im(T)$. Además, por ser T una transformación lineal sobreyectiva, $Im(T) = W$, por tanto, $dim(V) = dim(Im(T)) = dim(W)$.

Para mostrar la otra implicación, supongamos que

$$dim(V) = dim(W)$$

y consideremos a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ como bases de V y W, respectivamente. Podemos ver que la transformación lineal $T : V \to W$, donde $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ resulta ser un isomorfismo. En efecto, T es sobreyectiva ya que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es base, tanto de $Im(T)$, como de W, lo que implica que $Im(T) = W$. En consecuencia, como $dim(V) = dim(W)$, por el Resultado 2 del Teorema 10, T es inyectiva. □

Volviendo sobre la identificación de una transformación lineal y su matriz asociada, podemos ver que las propiedades de las transformaciones lineales se caracterizan por el número de pivotes de la forma escalonada de sus matrices asociadas, como lo establecemos en el siguiente teorema, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 18).

Teorema 12 [*Matriz asociada, inyectividad y sobreyectividad*].
Sean $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, con V y W espacios vectoriales de dimensión finita y A_T la matriz $m \times n$ asociada a la transformación, respecto a dos bases dadas. Entonces,

1. T es inyectiva, si y sólo si, la forma escalonada de A_T tiene n pivotes.
2. T es sobreyectiva, si y sólo si, la forma escalonada de A_T tiene m pivotes.
3. T es un isomorfismo, si y sólo si, A_T es invertible.

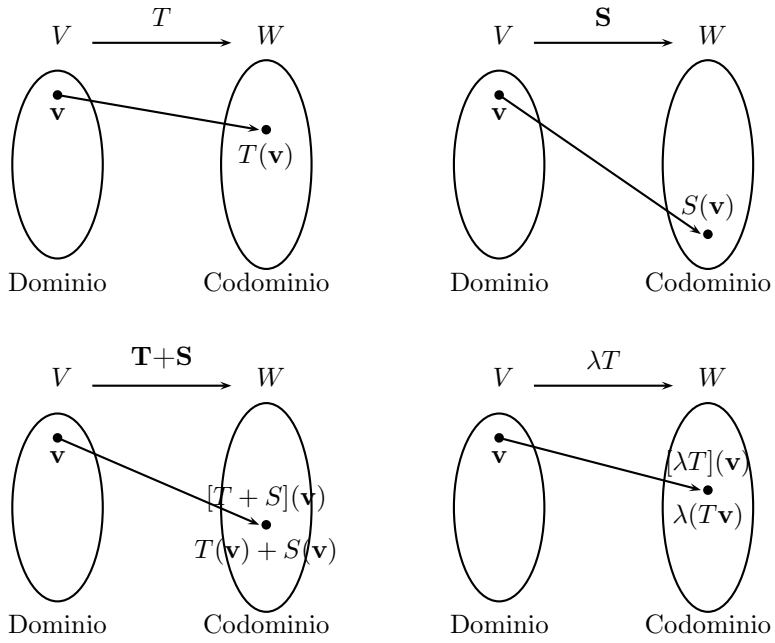


Figura 5.15: Representación de la suma y el producto por escalar de transformaciones lineales

5.6. Algebra de transformaciones lineales

Dado que las transformaciones lineales son casos particulares de funciones, podemos definir la suma, el producto por escalar y la composición de transformaciones lineales, como se hace en las funciones de valor real. Adicionalmente, veremos que estas operaciones están relacionadas con las operaciones matriciales de sus matrices asociadas.

Definición 10 [*Suma y producto por escalar de transformaciones lineales*]. Dadas dos transformaciones lineales $T, S : V \longrightarrow W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $T + S$, *la suma* de T y S, como la función

$$(T + S) : V \longrightarrow W, \quad \text{tal que} \quad (T + S)(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in V$; y definimos λT, el *producto de T por el escalar λ*, como la función

$$(\lambda T) : V \longrightarrow W, \quad \text{tal que} \quad (\lambda T)(\mathbf{v}) = \lambda[T(\mathbf{v})],$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

Ejemplo 25. Dadas las transformaciones lineales $T, S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$, tal que $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a+bx$ y $S\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a-2bx$, calculemos $(T+S)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $(-3T)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Por la definición anterior,

$$\begin{aligned}(T+S)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= (-2+5x) + (-2-10x) \\ &= -4-5x\end{aligned}$$

y

$$(-3T)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -3\left[T\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = -3(-2+5x) = 6-15x.$$

□

Teorema 13 [*Propiedad clausurativa de la suma y el producto por escalar de transformaciones lineales*].
Si $S, T : V \longrightarrow W$ son transformaciones lineales y μ es un escalar, entonces las funciones

$$(T+S) : V \longrightarrow W \ \text{ y } \ (\mu T) : V \longrightarrow W$$

son transformaciones lineales.

Demostración: Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, entonces

$$\begin{aligned}(S+T)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) &= S(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) + T(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) \\ &= S(\mathbf{v}_1) + S(\mathbf{v}_2) + T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \\ &= S(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_1) + S(\mathbf{v}_2) + T(\mathbf{v}_2) \\ &= (S+T)(\mathbf{v}_1) + (S+T)(\mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S+T)(\lambda\mathbf{v}) &= S(\lambda\mathbf{v}) + T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\,[S(\mathbf{v})] + \lambda\,[T(\mathbf{v})] \\ &= \lambda[S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})] = \lambda(S+T)(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

de donde podemos concluir que $(S+T)$ es también una transformación lineal. De otro lado,

$$\begin{aligned}(\mu T)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) &= \mu[T(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)] = \mu[T(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)] \\ &= \mu[T(\mathbf{v}_1)]+\mu[T(\mathbf{v}_2)] = (\mu T)(\mathbf{v}_1)+(\mu T)(\mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu T)(\lambda\mathbf{v}) &= \mu[T(\lambda\mathbf{v})] = \mu[\lambda T(\mathbf{v})] \\ &= (\mu\lambda)[T(\mathbf{v})] = \lambda[(\mu T)(\mathbf{v})],\end{aligned}$$

de donde concluimos que (μT) también es una transformación lineal. □

El conjunto de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W, con la suma y producto por escalar antes definidas, satisfacen las propiedades que caracterizan a los espacios vectoriales. El Teorema 13 establece las propiedades clausurativas y, en el siguiente teorema, planteamos el resto de las 10 propiedades que demuestran que $\mathcal{L}(V,W)$, el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, es un espacio vectorial[3].

Teorema 14 [*Espacio vectorial de transformaciones lineales*]. Dadas las transformaciones lineales $R, S, T : V \longrightarrow W$ y los escalares λ, μ, entonces

1. $R+(S+T)=(R+S)+T$
2. $S+T=T+S$
3. $T+\mathbf{0}=\mathbf{0}+T=T$
4. $T+(-T)=(-T)+T=\mathbf{0}$
5. $\lambda(S+T)=\lambda S+\lambda T$
6. $(\lambda+\mu)T=\lambda T+\mu T$
7. $(\lambda\mu)T=\lambda(\mu T)=\mu(\lambda T)$
8. $1T=T$
9. $0T=\mathbf{0}$

Demostración: Se deja como ejercicio para el lector (Ejercicio 26).

Definamos ahora la composición, una operación que está definida en funciones tales que el codominio de una de las funciones coincide con el dominio de la otra. En este caso, nos restringiremos a transformaciones lineales.

[3]Si tenemos en cuenta que una transformación lineal es una función y que el conjunto de funciones de V en W es un espacio vectorial, por el Teorema 13, podemos concluir que $\mathcal{L}(V,W)$, el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, es un subespacio del espacio de funciones de V en W, y por lo tanto, es un espacio vectorial; en consecuencia satisface las propiedades planteadas en el Teorema 14.

Definición 11 [*Composición de transformaciones lineales*]. Sean $T : U \longrightarrow V$ y $S : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales. Definimos $S \circ T$, la *composición de* S *con* T, como la función

$(S \circ T) : U \longrightarrow W \quad$ tal que $(S \circ T)(\mathbf{u}) = S[T(\mathbf{u})]$ para todo $\mathbf{u} \in U$.

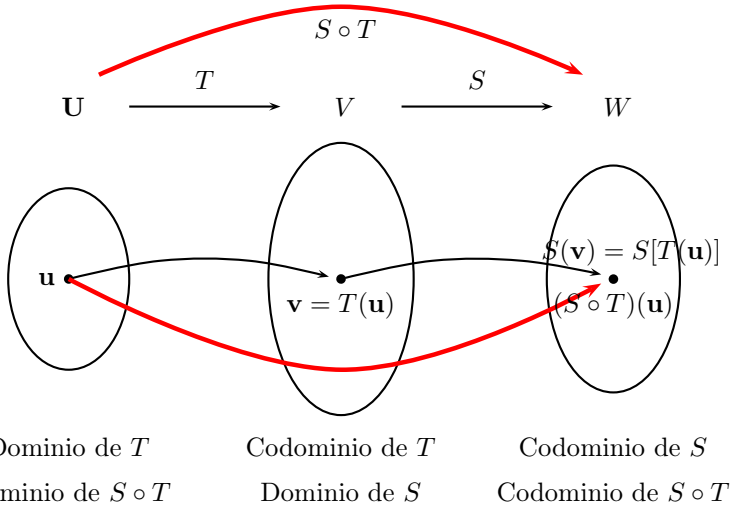


Figura 5.16: Representación de la composición de transformaciones lineales

Teorema 15 [*Propiedad "clausurativa" de la composición de transformaciones lineales*].
Dadas $T : U \longrightarrow V$ y $S : V \longrightarrow W$, transformaciones lineales, la composición de S con T, $(S \circ T) : U \longrightarrow W$, es también una transformación lineal.

Demostración: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= S[T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)] = S[T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)] \\ &= S[T(\mathbf{u}_1)] + S[T(\mathbf{u}_2)] = (S \circ T)(\mathbf{u}_1) + (S \circ T)(\mathbf{u}_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\lambda\mathbf{u}) &= S[T(\lambda\mathbf{u})] = S(\lambda T(\mathbf{u})) \\ &= \lambda[S[T(\mathbf{u})]] = \lambda(S \circ T)(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $S \circ T$ es una transformación lineal. □

Ejemplo 26. Dadas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ y $S : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tales que

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b)+cx \quad \text{y} \quad S(\alpha+\beta x) = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \beta \end{pmatrix},$$

calculemos $(S \circ T)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Por la definición de composición,

$$(S \circ T)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = S\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = S\left(-1+3x\right)$$
$$= \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

Observemos que, en general, la composición de transformaciones lineales no es conmutativa. Es más, en muchos casos $S \circ T$ está bien definida pero $T \circ S$ no, como ocurre en el Ejemplo 26, donde $S \circ T$ está bien definida pero $T \circ S$, no. En otros casos, aún estando ambas composiciones bien definidas, sus dominios y/o imágenes pertenecen a espacios vectoriales distintos.

La composición de transformaciones lineales también satisface propiedades algebraicas, las cuales consignamos en el siguiente teorema.

Teorema 16 [*Propiedades de la composición de transformaciones lineales*].
Sean R, S y T transformaciones lineales tales que, en cada caso, las composiciones están bien definidas y sea λ un escalar, entonces

1. $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.
2. $T \circ (S + R) = (T \circ S) + (T \circ R)$.
3. $(T + S) \circ R = (T \circ R) + (S \circ R)$.
4. $\lambda(T \circ S) = (\lambda T) \circ S = T \circ (\lambda S)$.
5. $I \circ T = T \circ I = T$.
6. $\mathbf{0} \circ T = \mathbf{0}$ y $T \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Demostración: Demostremos las Propiedades 1 y 4, las demás las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 28).

1. Por definición de la composición de transformaciones lineales,

$$\begin{aligned}[(T \circ S) \circ R](\mathbf{v}) &= (T \circ S)[R(\mathbf{v})] = T[S(R(\mathbf{v}))] \\ &= T[(S \circ R)(\mathbf{v})] = [T \circ (S \circ R)](\mathbf{v}).\end{aligned}$$

4. Igualmente, por la definición de la composición de transformaciones lineales,

$$\begin{aligned}\lambda(T \circ S)(\mathbf{v}) &= \lambda[T(S(\mathbf{v})] = (\lambda T)[S(\mathbf{v})] \\ &= [(\lambda T) \circ S](\mathbf{v})\end{aligned}$$

de otro lado,

$$\begin{aligned}\lambda(T \circ S)(\mathbf{v}) &= (T \circ S)(\lambda\mathbf{v}) = T(S(\lambda\mathbf{v})) \\ &= T(\lambda S(\mathbf{v})) = [T \circ (\lambda S)](\mathbf{v}).\end{aligned}$$

□

En la Sección 5.2, vimos que existe una estrecha relación entre las transformaciones lineales y las matrices, a saber, si T es una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V y W, respectivamente y A_T es la matriz asociada a T, respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, entonces

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Mediante esta relación entre transformaciones lineales y matrices, podemos establecer una correspondencia entre las operaciones algebraicas de las transformaciones lineales y las operaciones algebraicas de las matrices asociadas a ellas, como lo consignamos en el siguiente teorema.

Teorema 17 [*Transformaciones lineales y matrices asociadas*].
Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ bases de los espacios vectoriales U, V y W, respectivamente; $T, S : U \longrightarrow V$ y $R : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales; A_T y A_S las matrices asociadas a T y S respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ y A_R la matriz asociada a R respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$, entonces la matriz asociada a la transformación lineal

1. $T + S$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es $A_T + A_S$.
2. λT respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es λA_T.
3. $-T$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es $-A_T$.
4. $T - S$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es $A_T - A_S$.
5. $R \circ T$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $A_R A_T$.

Demostración: Demostremos la Propiedad 5; las demás las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 28).

Por la definición de matriz asociada a una transformación lineal,

$$\begin{aligned}[(R \circ T)(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}''} = [R(T(\mathbf{u}))]_{\mathcal{B}''} &= A_R[T(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}'} \\ &= A_R(A_T[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}) = (A_R A_T)[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

y por la propiedad de unicidad de la matriz asociada a $R \circ T$ (Teorema 5, Pág. 310), la matriz asociada a $(R \circ T)$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $A_R A_T$. □

Como ocurre en general para el conjunto de funciones, la composición de transformaciones lineales permite caracterizar las transformaciones lineales que son invertibles, como lo consignamos en la siguiente definición.

Definición 12 [*Transformación lineal invertible*]. Decimos que $T : V \longrightarrow W$ es una *transformación lineal invertible*, si y sólo si, existe una transformación lineal $S : W \longrightarrow V$ tal que

$$(T \circ S) = I_W : W \longrightarrow W \quad y \quad (S \circ T) = I_V : V \longrightarrow V.$$

A S la llamamos *transformación inversa* de T.

Ejemplo 27. Verifiquemos que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + b) + (a - b)x$ es una transformación lineal invertible.

Veamos que $S : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$S(u + vx) = \left(\frac{u + v}{2}, \ \frac{u - v}{2}\right)^T$$

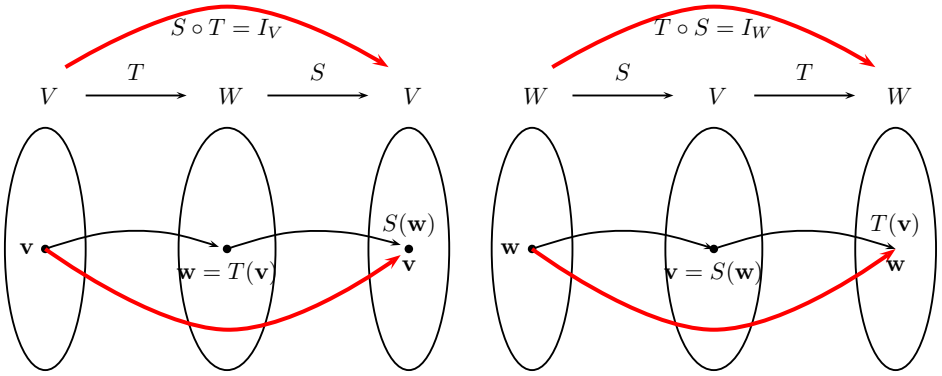


Figura 5.17: Representación de la transformación lineal inversa

es una transformación lineal tal que $T \circ S = I_{\mathcal{P}_1}$ y $S \circ T = I_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned}(T \circ S)(u + vx) &= T\left[S(u + vx)\right] = T\begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right)x \\ &= u + vx = I_{\mathcal{P}_1}(u + vx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S \circ T)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= S\left[T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = S[(a+b) + (a-b)x] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(a+b)+(a-b)}{2} \\ \frac{(a+b)-(a-b)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = I_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En consecuencia, S es la inversa de T; por lo tanto, T es una transformación lineal invertible. □

Al igual que con las funciones en general y que con las matrices, la inversa de una transformación lineal es única, como lo planteamos en el siguiente teorema, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 29).

Teorema 18 [*Unicidad de la transformación lineal inversa*].
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si existen $S_1, S_2 : W \to V$, dos transformaciones lineales tales que $T \circ S_1 = T \circ S_2 = I_W$ y $S_1 \circ T = S_2 \circ T = I_V$, entonces $S_1 = S_2$.

Similarmente, como hicimos en el caso de las matrices, la inversa de la transformación lineal T la denotamos T^{-1}. A continuación, demostramos la relación de equivalencia entre las transformaciones lineales invertibles y los isomorfismos, que, en particular, nos permite determinar fácilmente cuando una transformación lineal no es invertible.

Teorema 19 [*Transformaciones lineales invertibles e isomorfismos*].
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. T es invertible, si y sólo si, T es un isomorfismo.

Demostración: Supongamos que T es invertible y que S es su inversa. Tomemos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ y supongamos que $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$, así que $S(T(\mathbf{v}_1)) = S(T(\mathbf{v}_2))$, de donde concluimos que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ y por consiguiente que T es inyectiva. Tomemos ahora $\mathbf{w} \in W$ y sea $\mathbf{v} = S(\mathbf{w})$, así que $T(\mathbf{v}) = T(S(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$, de donde concluimos que T es sobreyectiva y por tanto, es un isomorfismo.

Supongamos ahora que T es un isomorfismo, así que T es inyectiva y sobreyectiva. Sea $\mathbf{w} \in W$, entonces existe un único $\mathbf{v} \in V$, tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Definimos S, de tal forma que $S(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, cuando $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Es fácil verificar que S es la inversa de T (Ejercicio 30); por tanto, T es invertible. □

Ejemplo 28. Utilicemos el teorema anterior para determinar si la transformación del Ejemplo 1, Pág. 297, es invertible.

Si la transformación del Ejemplo 1, que va de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ fuese invertible, por el teorema anterior, T seria un isomorfismo y por lo tanto, los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ serían isomorfos, lo cual, por el Teorema 11, Pág. 324, no es posible ya que sus dimensiones son distintas. En consecuencia, la transformación del Ejemplo 1 no es invertible. □

Por el Teorema 19, podemos concluir que la transformación lineal del Ejemplo 27 es un isomorfismo, pero en general no es fácil determinar que una transformación lineal es un isomorfismo encontrando su transformación inversa. Afortunadamente, podemos demostrar que para determinar si una transformación lineal es invertible es suficiente determinar que una matriz asociada a ella lo sea, dada la relación en-

tre las transformaciones lineales invertibles y las matrices invertibles, que establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 20 [*Transformación lineal invertible y matriz asociada*]. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de los espacios vectoriales V y W, respectivamente, $T : V \to W$ una transformación lineal y A_T la matriz asociada a la transformación T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces

1. T es invertible, si y sólo si, A_T es invertible.
2. Si T es invertible, entonces A_T^{-1} es la matriz asociada a la transformación lineal T^{-1}, respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$.

Demostración: La dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 32).

Ejemplo 29. Utilicemos el teorema anterior para determinar si la transformación lineal del Ejemplo 27, Pág. 332, es invertible, sin calcular su transformación lineal inversa.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_1$, respectivamente. La matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es $A_T = [\,[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}'}\,[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}'}\,] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es -2; por lo tanto, A_T es invertible y en consecuencia, por el teorema anterior, T es invertible. □

5.7. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	**Pág.**	**Conceptos**	**Pág.**
Dominio	295	Matrices semejantes	318
Codominio	295	Transformación inyectiva	318
Conjunto imagen	295	Transformación sobreyectiva	321
Transformación lineal	296	Isomorfismo	322
Transformación nula	302	Espacios isomorfos	322
Transformación idéntica	302	Suma de transformaciones	326
Núcleo de una transformación	305	Producto por escalar de transformaciones	326
Imagen de una transformación	306	Composición de transformaciones	329
Matriz asociada a una transformación	308	Transformación invertible	332
Nulidad y rango de una transformación	314		

1. Determine cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T[(a\ \ b\ \ c)^T] = (2a\ \ \ b - 3c)^T$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T[(a\ \ b)^T] = (1 + a) - 2bx$

   c) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a) = a + 2ax + 3ax^2$

   d) $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a + x - (b + c)x^2$

   e) $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T[p(x)] = p'(x)$

   f) $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ tal que $T[p(x)] = xp(x)$

   g) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

   h) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T[(a\ \ b\ \ c)^T] = (a\ \ 2b - 3c)^T$

   i) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T[(a\ \ b)^T] = (-3a\ \ \ b + a\ \ b)^T$

   j) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & 0 \\ 0 & d + 2 \end{pmatrix}$

   k) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T[(a\ \ b\ \ c)^T] = a + 2bx - 3cx^2$

   l) $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a - cx^2$

m) La reflexión a través del plano XY en $\mathbb{R}^3$.

n) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T[(x \;\; y)^T] = (\alpha x \;\; y)^T$ (*compresión* $[|\alpha| < 1]$ ó *expansión* $[|\alpha| > 1]$ a lo largo del Eje X)

ñ) La proyección sobre el plano XZ en $\mathbb{R}^3$

o) $T : \mathcal{M}_{3\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 3}$ tal que $T(A) = A^T$

p) $T : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$

2. Demuestre la propiedad homogénea de la transformación nula (Ejemplo 6, Pág. 302).

3. Demuestre las propiedades aditiva y homogénea de la transformación idéntica (Ejemplo 7, Pág. 302).

4. Considere la transformación matricial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, donde la matriz es una matriz elemental. Interprete geométricamente dicha transformación. ¿Qué puede decirse de este tipo de transformaciones en $\mathbb{R}^n$?

5. Demuestre el Teorema 1, Pág. 302. [AYUDA: Use repetidamente la propiedad aditiva de la transformación lineal y luego la propiedad homogénea en cada sumando.]

6. Demuestre el Corolario 1.1, Pág. 302.

7. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T[(x \;\; y \;\; z)^T] = (x - y \;\; x - z)^T$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T[(x \;\; y \;\; z)^T] = (x - y + z \;\; 0 \;\; 0)^T$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T[(x \;\; y)^T] = (2x \;\; 0 \;\; 0)^T$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T[(x \;\; y \;\; z)^T] = (x - y \;\; x \;\; z)^T$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T[(x \;\; y \;\; z)^T] = (2y \;\; 0 \;\; x)^T$,

encuentre la imagen de los siguientes conjuntos, identificándola geométricamente, si es posible.
S_1 : La recta que pasa por $P = (-1 \;\; 2 \;\; 5)^T$ y $Q = (-2 \;\; 0 \;\; 3)^T$.
S_2 : La recta que pasa por $P = (-1 \;\; 2 \;\; 5)^T$ y $Q = (2 \;\; -4 \;\; -10)^T$.
S_3 : El plano que pasa por el origen y tiene vectores directores $\mathbf{u} = (2 \;\; 0 \;\; -1)^T$ y $\mathbf{v} = (0 \;\; -1 \;\; -3)^T$.
S_4 : El plano que pasa por el punto $Q = (-2 \;\; 0 \;\; 3)^T$ y tiene vectores directores $\mathbf{u} = (2 \;\; 0 \;\; -1)^T$ y $\mathbf{v} = (0 \;\; -1 \;\; -3)^T$.

8. Dada $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, demuestre que Si $V = Gen\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\}$, entonces

$$Im(T) = Gen\{T(\mathbf{v}_1),\ T(\mathbf{v}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{v}_n)\}.$$

9. Demuestre que una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ envía rectas en rectas o puntos, y a planos en planos, rectas o puntos. ¿Qué pasa con los hiperplanos?

10. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y U un subespacio vectorial de V de dimensión k. Demuestre que $T(U) = \{y \in W : y = T(x),\ x \in U\}$ es un subespacio vectorial de W de dimensión menor igual a k.

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcule $T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

12. ¿Cuántas transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en el plano

$$H = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = t\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_2, t, s \in \mathbb{R}\right\}$$

de $\mathbb{R}^3$ existen? (Ejemplo 9, Pág. 304).

13. Encuentre una matriz asociada a la transformación lineal que rota todo vector de $\mathbb{R}^3$ 45^o, en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor del Eje Y.

14. Encuentre una matriz asociada a las transformaciones lineales T y S del Ejemplo 3, Pág. 299. [AYUDA: Ver segunda parte del Ejemplo 12, Pág. 309.]

15. Determine cuáles de las transformaciones lineales del Ejercicio 1 son transformaciones matriciales.

16. Dada la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ y las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, demuestre que la matriz A_T, tal que $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ para todo $\mathbf{v} \in V$, es única.[AYUDA: Suponga que existe otra matriz B *y tome* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$, *con* $\mathbf{v}_i \in \mathcal{B}$ *para encontrar las columnas de* A_T *y* B.]

17. Demuestre que si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, entonces $\kappa(T) + \tau(T) = dim(V)$.

18. Demuestre el Teorema 12, Pág. 325. [AYUDA: Utilice las propiedades de las matrices escalonadas estudiadas en el Capitulo 1 y los resultados del Teorema 6, Pág. 312.]

19. Encuentre una matriz asociada a cada una de las transformaciones lineales del Ejercicio 1, explicitando la bases del dominio y del codominio. ¿Existe otra matriz asociada a cada transformación?

20. Encuentre el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales del Ejercicio 1 y diga cuáles son sus dimensiones.

21. Sabiendo que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, encuentre el núcleo y la imagen de cada una de las siguientes situaciones y diga cuáles son sus dimensiones.

    a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son sus respectivas bases usuales.

    b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1\ 0\ 0)^T, (1\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 1)^T\}$ y $\mathcal{B}'$ es la base usual de $\mathbb{R}^2$.

    c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ es la base usual de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1\ -1)^T, (1\ 2)^T\}$.

    d) $V = \mathcal{P}_2$, $W = \mathcal{P}_1$, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son sus respectivas bases usuales.

    e) $V = \mathcal{P}_2$, $W = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{B} = \{1 - x, x - x^2, x^2 - 1\}$ y $\mathcal{B}' = \{1 - x, x\}$.

22. Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ es la transformación idéntica ($T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$), la matriz asociada a T es la matriz identidad de tamaño n, independientemente de la base de V que se tome. ¿Cuál es la matriz asociada a T si tomamos una base en el dominio y otra en el codominio?

23. Demuestre que $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva (para cada $\mathbf{w} \in Im(T)$, existe un **único** $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$), si y sólo si, $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$ implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

24. Determine si las transformaciones lineales del Ejercicio 1 son inyectivas, sobreyectivas, isomorfismos y/o invertibles.

25. Dada $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal sobreyectiva, demuestre que Si $V = Gen\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n\}$, entonces

$$W = Gen\{T(\mathbf{v}_1),\ T(\mathbf{v}_2),\ \ldots,\ T(\mathbf{v}_n)\}.$$

[AYUDA: Utilice la Definición 7, Pág. 321, y el resultado del Ejercicio 8.]

26. Demuestre el Teorema 14, Pág. 328.

27. Encuentre una transformación lineal no trivial entre cada uno de los espacios vectoriales dados y determine si es inyectiva, sobreyectiva, isomorfismo y/o invertible.

    a) $V = \mathbb{R}^2$ y $W =$ el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene vectores directores $\mathbf{d}_1 = (-1\ \ 2\ \ 5)^T$ y $\mathbf{d}_2 = (3\ \ 0\ \ -2)^T$

    b) $V = \{p(x) = a+bx+cx^2 : a = 0\}$ y $W = \{p(x) = a+bx+cx^2 : b = 0\}$

    c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d,\ \text{y}\ b = c \right\}$

    d) $V =$ el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene como vector normal a $\mathbf{n} = (-1\ \ 2\ \ 5)^T$ y $W = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} = \lambda(-2\ \ 5)^T\}$

    e) $V = \{(x\ \ y\ \ z\ \ w)^T : x - y + 2z = 0\}$ y $W = \{(x\ \ y\ \ z\ \ w)^T : x + 2z - w = 0\}$

28. Complete las demostraciones de los Teoremas 16 y 17, Págs. 330 y 331.

29. Demuestre el Teorema 18, Pág. 334. [AYUDA: Ver demostración del Teorema 5 del Capítulo 3, Pág. 154.]

30. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo y definimos $S : W \to V$, de tal forma que $S(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, cuando $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, demuestre que S es la inversa de T.

31. Para cada uno de los siguientes casos, encuentre, si existe, $S+T$, $T-S$, $-2T$, T^{-1}, $S \circ T$ y $T \circ S$ y sus matrices asociadas respecto a las bases que usted elija.

    a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T[(a\ \ b\ \ c)^T] = (2a\ \ b-3c)^T$; $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $S[(a\ \ b\ \ c)^T] = (a\ \ 2b+c)^T$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T[(a \quad b \quad c)^T] = (a \quad 2b + c \quad -c)^T$; $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S[(a \quad b \quad c)^T] = (-a \quad 2b \quad 3c)^T$.

c) $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ tal que $T[p(x)] = p'(x)$; $S : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $S[p(x)] = xp(x)$.

d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$; $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $S(a + bx + cx^2) = a - cx^2$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(a \quad b \quad c)^T = (a \quad 2b - 3c)^T$; $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S(a \quad b)^T = (-3a \quad b + a \quad b)^T$

f) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(a \quad b \quad c)^T = a + 2bx - 3cx^2$; $S : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $S(a + bx + cx^2) = a - cx^2$

32. Demuestre el Teorema 20, Pág. 335. [AYUDA: Para la primera parte, use los resultados de los Teorema 12 y 19, Págs. 325 y 334; para la segunda, use una técnica similar a la demostración del Numeral 2 del Teorema 16 del Capítulo 4, Pág. 247.]

33. Conteste **falso** o **verdadero** a cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

a) Toda transformación lineal es una función.

b) Si $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces T es una transformación lineal.

c) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $dim\ V = dim\ W$, entonces T es invertible.

d) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y T es invertible, entonces $dim\ V = dim\ W$.

e) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva y $dim\ V = dim\ W$, entonces T es invertible.

f) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal sobreyectiva y $dim\ V = dim\ W$, entonces T es inyectiva.

g) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $dim\ V < dim\ W$, entonces T no es inyectiva.

h) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $dim\ V < dim\ W$, entonces T no es sobreyectiva.

i) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y T es inyectiva, entonces $dim\ V \leq dim\ W$.

j) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y T es sobreyectiva, entonces $dim\ V < dim\ W$.

k) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $\mathbf{v} \in Nu(T)$, entonces $\mathbf{v} \in N_{A_T}$.

l) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $\mathbf{w} \in Im(T)$, entonces, para alguna base $\mathcal{B}$ de W, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} \in N_{A_T}$.

m) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $S : V \longrightarrow Im(T)$ tal que $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ es una transformación lineal invertible.

n) Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $S : Nu(T) \longrightarrow W$ tal que $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ es la transformación lineal nula.

ñ) Si $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ es una transformación lineal sobreyectiva , entonces T es inyectiva.

o) La proyección ortogonal sobre un subespacio es una transformación lineal inyectiva del espacio vectorial en el subespacio.

p) La proyección ortogonal sobre un subespacio es una transformación lineal sobreyectiva del espacio vectorial en el subespacio.

q) La rotación de 60^o en el sentido contrario a la manecilla del reloj es un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

r) La traslación de vectores en el plano, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ fijo, no es una transformación lineal.

s) Si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ implica que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, entonces T es una transformación lineal inyectiva.

t) Siempre que se puedan calcular las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$, se tiene que una es la inversa de la otra.

u) $(T \circ S)(\mathbf{v}) = A_T A_S \mathbf{v}$, si A_T y A_S, las matrices asociadas a las transformaciones lineales, son las matrices asociadas respecto a las bases canónicas de los dominios y codominios.

v) La matriz que define una transformación matricial es la matriz asociada a la transformación lineal en cualquier base.

w) Una transformación lineal puede tener infinitas matrices asociadas.

x) Dos matrices semejantes representan la misma transformación lineal en diferentes bases.

y) Dados dos espacios vectoriales V y W, $\mathcal{L}(V, W)$, el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, es un espacio vectorial.

z) Una función lineal ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = mx + b$) es una transformación lineal.

Capítulo 6

VALORES Y VECTORES PROPIOS

6.1. Introducción

Aunque, en general, la imagen de un vector bajo una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ no es un vector paralelo al vector inicial, existen vectores especiales para los cuales la acción de la transformación es muy sencilla: el vector y su imagen tienen la misma dirección.[1] Estos vectores especiales los denominamos vectores propios y conocerlos son de gran ayuda en el análisis de la transformación puesto que en la dirección de ellos, la transformación sólo "encoge" o "estira" los vectores, cambiando, en algunos casos, el sentido de ellos.

Por ejemplo, la transformación matricial $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en la dirección de $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, "estira" los vectores, puesto que $T(\mathbf{x}_1) = A\mathbf{x}_1 = 3\mathbf{x}_1$ y, en la dirección de $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, "encoge" los vectores y los cambia de sentido, puesto que $T(\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_2$, lo cual ilustramos en el siguiente gráfico. Esta característica de los vectores propios es muy importante en el estudio de ecuaciones diferenciales en general, y en el

[1] Para plantear lo mismo para una transformación lineal de cualquier espacio vectorial en si mismo, necesitamos generalizar el concepto de *paralelismo* a vectores de cualquier espacio vectorial: Dado V, un espacio vectorial, decimos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$ son paralelos, si y sólo si, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$.

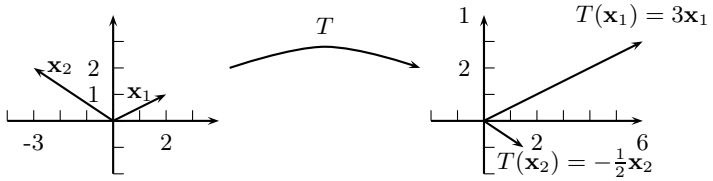


Figura 6.1: Representación de los vectores y valores propios de una transformación lineal en el plano ($\mathbb{R}^2$)

análisis de los sistemas dinámicos, tanto discretos como continuos, en particular. En la práctica, los vectores propios suministran información crítica en el diseño de ingeniería y en diversas aplicaciones de la física y la química [11], [14].

Por la relación entre las transformaciones y las matrices que estudiamos en el capítulo anterior, estudiaremos los valores y vectores propios de una transformación como una característica de las matrices asociadas. Así por ejemplo, si $\mathbf{v}$ es un vector tal que $\mathbf{v} = A\mathbf{v}$, decimos que $\mathbf{v}$ es un *vector invariante o estacionario* para la trasformación definida por la matriz A. Si el vector $\mathbf{u}$ tiene la propiedad de ser paralelo a su imagen mediante la transformación T definida por la matriz A, por ejemplo $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$, decimos que $\mathbf{u}$ es un vector propio de la matriz A o equivalentemente, de la transformación T definida por A.

6.2. Conceptos básicos

Como mencionamos en la introducción, aunque los vectores propios son vectores paralelos a sus imágenes bajo una transformación, por la relación que existe entre las transformaciones lineales y las matrices, definimos primero éste y otros conceptos relacionados, respecto de una matriz para más adelante hacerlo respecto de una transformación. Es de anotar que, como estos conceptos tienen sentido sólo para transformaciones que van de un espacio vectorial en si mismos, en este capítulo, estaremos hablando sólo de *matrices cuadradas*.

Definición 1 [*Vector y valor propio de una matriz*]. Dada A una matriz $n \times n$, decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio*[2] de A y que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *vector propio*[3] de A asociado a λ, si y sólo si,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

.

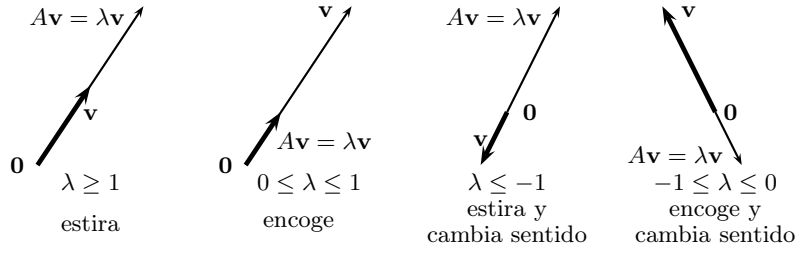


Figura 6.2: Efectos geométricos de una transformación lineal en la dirección de uno de sus vectores propios

Observemos que la exclusión del vector cero como vector propio es natural, ya que si, en la ecuación vectorial $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ es el vector cero, entonces λ puede ser cualquier número real.

Observemos también que a un valor propio le corresponden infinitos vectores propios. En efecto, si $\mathbf{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ, el vector $\mathbf{u} = \mu\mathbf{v}$, para cualquier $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, también es un vector propio asociado a λ ya que $A\mathbf{u} = A(\mu\mathbf{v}) = \mu(A\mathbf{v}) = \mu(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mu\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}$.

Ejemplo 1. Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Verifiquemos que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A asociados a los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$, respectivamente.

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{u}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2\mathbf{v}$$

□

[2]Los valores y vectores propios también se conocen como *valores y vectores característicos* o *eigenvalores y eigenvectores*.

[3]Es importante anotar que los valores propios son números reales porque estamos trabajando en espacios vectoriales **reales**, pero podrían ser complejos cuando consideremos espacios vectoriales donde los escalares son los números complejos.

De la definición anterior, tenemos que un vector propio asociado a λ es una solución no nula de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ o lo que es equivalente, un vector propio asociado a λ es una solución **no trivial** del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por el Teorema 7 y el Corolario 15.1 del Capítulo 3, Págs. 159 y 192, el anterior sistema homogéneo tiene soluciones diferentes a la trivial, si y sólo si, $\det(A - \lambda I) = 0$. Así que, los valores propios de A son los valores reales de λ que hacen que $\det(A - \lambda I) = 0$ y los vectores propios asociados a λ son las soluciones no nulas del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este razonamiento es la demostración del siguiente teorema, el cual permite caracterizar separadamente los valores propios (parte no lineal) y los vectores propios asociados a un valor propio (parte lineal).

Teorema 1 [*Caracterización de los vectores y valores propios de una matriz*].
Sea A una matriz cuadrada. Entonces

1. Un escalar λ es valor propio de A, si y sólo si, $\det(A - \lambda I) = 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Un vector $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, si y sólo si, $\mathbf{v}$ es una solución no trivial del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 2. Encontremos todos los valores y vectores propios de la matriz A del Ejemplo 1.

Aunque en general no es fácil el cálculo de un determinante, podemos ver que $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda^2$. Así que si $\det(A - \lambda I) = 0$, entonces $\lambda = 0$ ó $\lambda = -2$, de donde concluimos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$ son los valores propios de A, lo cual ya habíamos verificado en el Ejemplo 1.

Al resolver el sistema $(A - 0I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tenemos que el conjunto solución es

$$S_1 = \left\{ z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \, z \in \mathbb{R} \right\};$$

por tanto, los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$ son todos los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Y al resolver el sistema

$(A-(-2)I) = (A+2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tenemos que el conjunto solución es

$$S_2 = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\};$$

por tanto, los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda_2 = -2$ son todos los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Notemos que el vector $\mathbf{0}$, por definición, no es vector propio, mientras que el escalar 0 si puede ser valor propio. En particular, tenemos que si la matriz A tiene un valor propio igual a 0 es porque $\det(A-0I) = \det A = 0$, lo que es equivalente a que la matriz sea no invertible, resultado que consignamos en el siguiente teorema, como una caracterización de la invertibilidad de matrices.

Teorema 2 [*Caracterización de las matrices invertibles*].
Una matriz A es invertible, si y sólo si, $\lambda = 0$ **no** es un valor propio de A.

Observemos que otra forma de expresar el Teorema 2 es diciendo que una matriz cuadrada es invertible, si y sólo si, todos sus valores propios son diferentes de cero.

Como mencionamos antes, los valores propios de A son las soluciones reales de la ecuación $\det(A-\lambda I) = 0$. Además, se puede demostrar que si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(A-\lambda I)$ es un polinomio en λ de grado n, cuyo coeficiente principal[4] es $(-1)^n$ [11]. Por la importancia que tiene este polinomio, le damos un nombre especial.

Definición 2 [*Polinomio característico*]. Dada una matriz A, decimos que $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ es el *polinomio característico de* A.

Ejemplo 3. Calculemos el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[4]Recordemos que se llama *coeficiente principal* de un polinomio en λ al coeficiente del término de mayor potencia de λ en el polinomio

Aunque en general, este polinomio no es fácil de calcular, en este caso, por ser A una matriz triangular, tenemos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 7 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 15.$$

□

Ejemplo 4. La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ no tiene valores propios, ya que su polinomio característico, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, no tiene raíces reales. □

Recordemos que el Teorema Fundamental del Álgebra ([5] [10]) establece que todo polinomio de coeficientes reales de grado n tiene n raíces complejas, contando multiplicidades[5]. Por tanto, si A es una matriz $n \times n$, podemos concluir que A tiene a lo más n valores propios, contando multiplicidades.

Definición 3 [*Multiplicidad algebraica de un valor propio*]. Llamamos *multiplicidad algebraica* del valor propio λ a la multiplicidad de λ como raíz real del polinomio característico de la matriz A.

Ejemplo 5. Las multiplicidades algebraicas de los valores propios de la matriz del Ejemplo 3 son todas 1. □

Ejemplo 6. Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix},$$

después de una serie de cálculos, tenemos que su polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$, de donde concluimos que $\lambda_1 = 1$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 2$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2. □

¿Cuáles son las multiplicidades algebraicas de los valores propios de la matriz del Ejemplo 2? (Ejercicio 4)

Como lo mencionamos antes, podemos ver que los vectores propios asociados a un valor propio λ son las soluciones no triviales del sistema

[5]Recordemos que a es una raíz del polinomio $p(x)$ con multiplicidad r, si y sólo si, $p(x) = (x-a)^r q(x)$ con $q(a) \neq 0$.

homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En otras palabras, el conjunto de los vectores propios asociados a un valor propio λ, junto con el vector $\mathbf{0}$, coincide con el espacio nulo de la matriz $(A - \lambda I)$ y le daremos un nombre especial.

Definición 4 [*Espacio propio*]. Dada A una matriz de tamaño $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A, definimos $E_{(\lambda)}$, el *espacio propio de A asociado a λ*, como el conjunto conformado por todos los vectores propios de A asociados a λ y el vector $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$; es decir,

$$E_{(\lambda)} = N_{(A-\lambda I)}.$$

Ejemplo 7: Debido a que los valores propios de la matriz A del Ejemplo 2 son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$, los espacios propios $E_{(0)}$ y $E_{(-2)}$ son los conjuntos solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A + 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontrados en el Ejemplo 2; es decir, los espacios propios de A son

$$E_{(0)} = \left\{ z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } E_{(-2)} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Por su definición, los espacios propios de una matriz $n \times n$ asociados a sus valores propios son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. A las dimensiones de estos subespacios, les llamamos de una manera particular, ya que nos permiten conocer propiedades importantes de la matriz.

Definición 5 [*Multiplicidad geométrica de un valor propio*]. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y λ un valor propio de A, definimos como *multiplicidad geométrica del valor propio λ* a la dimensión del espacio propio $E_{(\lambda)}$.

Ejemplo 8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

determinemos las multiplicidades geométricas de sus valores propios; es decir, las dimensiones de sus espacios propios.

Después de una serie de operaciones, tenemos que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)^2(3 - \lambda),$$

así que sus valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad algebraica 2 y 1, respectivamente.

Al encontrar los conjuntos solución de $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tenemos que los espacios propios son

$$E_{(1)} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad E_{(3)} = \left\{ z \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\},$$

cuyas dimensiones son ambas uno; por tanto, podemos concluir que las multiplicidades geométricas de los valores propios de A son ambas uno. □

Por las definiciones de multiplicidad algebraica y geométrica, es claro que ellas son mayores o iguales a uno[6]. Además, existe una relación entre las multiplicidades algebraica y geométrica de un mismo valor propio que aunque no es difícil de demostrar, no está al alcance del nivel de este texto, pero por su importancia la expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 3 [*Relación entre las multiplicidades de un valor propio*]. [11]
Si λ es un valor propio de una matriz de orden n, entonces

$$1 \leq \textit{multiplicidad geométrica de } \lambda \leq \textit{multiplicidad algebraica de } \lambda \leq n.$$

Del Teorema 3, es fácil concluir que si la multiplicidad algebraica de un valor propio es 1, las dos multiplicidades son iguales.

Ejemplo 9. Observemos que las multiplicidades algebraica y geométrica del valor propio $\lambda_1 = 1$ de la matriz A del Ejemplo 8 son ambas 1, mientras que las multiplicidades algebraica y geométrica del valor propio $\lambda_2 = 3$ son 2 y 1, respectivamente, satisfaciendo el Teorema 3. □

[6]Recordemos que si λ es raíz del polinomio $p(x)$, el polinomio tiene como factor a $(x - \lambda)$ con potencia al menos uno (multiplicidad algebraica es al menos uno); y como los espacios propios son no triviales, sus dimensiones son al menos uno (multiplicidad geométrica es al menos uno).

6.3. Caracterización de valores y vectores propios

El Teorema 1 es una caracterización **por separado** de los valores y vectores propios de una matriz y nos insinúan un procedimiento para encontrar los vectores y valores propios de una matriz. En algunos textos [7] [16], es presentado o al menos sugerido como un método de calcular los valores y vectores propios de una matriz, cuando en realidad, este procedimiento tiene sentido práctico para valores pequeños de n, el orden de la matriz, y debe ser usado para verificar que un valor dado o un vector dado es o no un valor o un vector propio de una matriz también dada. El procedimiento consiste de los siguientes tres pasos; cada uno de los cuales es un problema matemático no trivial.

Procedimiento para "calcular" valores y vectores propios de una matriz A.

1. Calcular el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

2. Calcular las raíces reales de $p(\lambda)$ (*valores propios de* A).

3. Resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, para cada valor de λ (*vectores propios de* A *asociados a* λ).

Ejemplo 10. Dada la matriz A, encontremos los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda$. Como las raíces de este polinomio son $\lambda = 0$ y $\lambda = 5$, los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$, ambos con multiplicidad algebraica uno.

Al resolver el sistema

$$(A - 0I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que los vectores propios de A asociados a $\lambda = 0$ son los

vectores no nulos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tales que $3x_1 - 2x_2 = 0$; es decir,

$$E_{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 3x_1 - 2x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= Gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Y al resolver el sistema

$$(A - 5I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que los vectores propios de A asociados a $\lambda = 5$ son los vectores no nulos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tales que $2x + 2y = 0$; es decir,

$$E_{(5)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Ejemplo 11. Calculemos los valores y vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus valores propios.

Después de hacer varios cálculos para calcular y factorizar el polinomio característico de A, obtenemos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 1) \ ,$$

cuyas raíces son $\lambda = 2$ y $\lambda = \pm i$, de donde concluimos que la matriz A sólo tiene un valor propio, $\lambda = 2$, que tiene multiplicidad algebraica (y por lo tanto, la geométrica) igual a uno.

Al resolver el sistema

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que los vectores propios de A asociados a $\lambda = 2$ son los vectores no nulos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tales que $-2x_1 + 2x_2 = 0$ y $-x_1 - 2x_2 = 0$; es decir,

$$E_{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

lo que corrobora que la multiplicidad geométrica también es uno. □

Es importante hacer notar que, en general, encontrar el polinomio característico de una matriz no es fácil (recordemos que dicho polinomio resulta del cálculo de un determinante de una matriz cuyas entradas contienen una variable) y que encontrar las raíces de un polinomio también es un problema difícil de resolver. Así, el procedimiento sugerido para encontrar los valores y vectores propios de una matriz puede resultar muy difícil de usar[7], aunque sí es un procedimiento sencillo para **verificar** que un número dado es o no un valor propio o que un vector dado es o no un vector propio.

Por el Teorema 13 del Capítulo 3, Pág. 186, sabemos que si la matriz es triangular, su determinante es simplemente el producto de los elementos de la diagonal. Así que calcular el polinomio característico y los valores propios de una matriz triangular es fácil (ver Ejemplo 3).

Teorema 4 [*Valores propios de una matriz triangular*].
Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal de la matriz.

Demostración: Si $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Así que los valores propios de A, que son las soluciones de $p(\lambda) = 0$, son $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$, los cuales son los elementos de la diagonal de A.

[7] En la práctica, para calcular los valores propios de una matriz, se utilizan métodos numéricos como el método de las potencias, el método de Raleigh y el método QR de Francis, entre otros [6], [15].

□

6.4. Independencia de los vectores propios

Como los vectores propios nos permiten analizar más fácilmente las transformaciones lineales, es importante saber si los vectores propios de una matriz forman un conjunto de vectores linealmente independiente y si constituyen un conjunto generador de $\mathbb{R}^n$, cuyas respuestas parciales se encuentran en el siguiente teorema.

Teorema 5 [*Bases de* $\mathbb{R}^n$ *formada por vectores propios*].
Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son valores propios distintos de una matriz A de tamaño $n \times n$, entonces

1. Un conjunto de vectores propios $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectivamente, es *l.i.*
2. Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$ son bases de los espacios propios $E_{(\lambda_1)}, E_{(\lambda_2)}, \ldots, E_{(\lambda_k)}$, respectivamente, entonces
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$$
es un conjunto *l.i.*
3. Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$ son bases de los espacios propios $E_{(\lambda_1)}, E_{(\lambda_2)}, \ldots, E_{(\lambda_k)}$, respectivamente, y
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$$
tiene n elementos, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Demostremos el primer resultado usando inducción matemática finita sobre k, el número de valores propios distintos de la matriz A ($k \leq n$), y dejamos la demostración de los otros resultados como ejercicio para el lector (Ejercicio 6).

El resultado es trivialmente válido para $k = 1$. Demostremos el resultado para $k = 2$. Supongamos que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}. \tag{6.1}$$

Multiplicando ambos lados por la matriz A, tenemos

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) &= \mathbf{0} && (6.2)\\ \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} && (6.3)\\ \alpha_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) + \alpha_2(\lambda_2\mathbf{v}_2) &= \mathbf{0}. && (6.4) \end{aligned}$$

Multiplicando (6.1) por λ_2 y restando el resultado de (6.4), obtenemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y puesto que $\mathbf{v}_1$ es un vector propio, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha_1 = 0$. Reemplazando este valor en (6.1), como $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ por ser un vector propio, concluimos que $\alpha_2 = 0$; por lo tanto, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son *l.i.*

Supongamos que el resultado es válido para $k = r < n$; es decir, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores *l.i.* y demostremos que el resultado es válido para $k = r + 1 \leq n$. Supongamos que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}. \qquad (6.5)$$

Multiplicando ambos lados por la matriz A, tenemos

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}) &= \mathbf{0} && (6.6)\\ \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{r+1}A\mathbf{v}_{r+1} &= \mathbf{0} && (6.7)\\ \alpha_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) + \alpha_2(\lambda_2\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_{r+1}(\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}) &= \mathbf{0} && (6.8) \end{aligned}$$

Multiplicando (6.5) por λ_{r+1} y restando el resultado de (6.8), obtenemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Como por hipótesis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq \lambda_{r+1}$ y por hipótesis de inducción el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es *l.i.*, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Reemplazando estos valores en (6.5), tenemos que por ser $\mathbf{v}_{r+1}$ un vector propio, $\mathbf{v}_{r+1} \neq 0$, de donde concluimos que $\alpha_{r+1} = 0$; por lo tanto, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ es *l.i.* □

Ejemplo 12. Verifiquemos la independencia lineal de los vectores propios correspondientes a valores propios distintos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Después de muchos cálculos para determinar y factorizar el polinomio característico de A, tenemos que

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$$

y por lo tanto, sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad algebraica 1 y 3, respectivamente.

Al resolver los sistemas homogéneos $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontramos que los espacios propios de A son

$$E_{(2)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_{(1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Así que la multiplicidad geométrica de los dos valores propios es uno. Además, es fácil concluir que los dos vectores que generan los espacios propios $E_{(2)}$ y $E_{(1)}$ forman un conjunto *l.i.*, ya que uno no es múltiplo del otro; por lo tanto, cualquier conjunto formado por un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ y un vector propio asociado a $\lambda_2 = 1$ es *l.i.* □

Observemos que si todas las raíces del polinomio característico de una matriz son reales y cada una de ellas tiene asociado tantos vectores propios *l.i.* como su multiplicidad algebraica, se satisface la hipótesis del tercer resultado del teorema anterior. Esta observación es la base de la demostración del siguiente corolario, la cual dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 8).

Corolario 5.1 [*Suficiencia I para la existencia de una base de* $\mathbb{R}^n$ *formada por vectores propios de una matriz*].
Si cada uno de los valores propios de una matriz A de tamaño $n \times n$ tiene su multiplicidad algebraica y geométrica iguales y la suma de sus multiplicidades algebraicas es n, existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz A.

Ejemplo 13. Encontremos una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Después de una serie de cálculos, obtenemos que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = -(\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$$

y por lo tanto, sus valores propios son $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad algebraica 1 y 2, respectivamente.

Al resolver los sistemas homogéneos $(A-10I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontramos que los espacios propios de A son

$$E_{(10)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_{(1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\},$$

de donde concluimos que los valores propios λ_1 y λ_2 tienen multiplicidad geométrica 1 y 2, respectivamente. Como las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A son iguales, por el Corolario 5.1, concluimos que existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

Además, por el Resultado 3 del Teorema 5, Pág. 356, podemos concluir que

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. □

Por el comentario que hicimos sobre el Teorema 3, Pág. 352, y recordando que, por el Teorema Fundamental del Álgebra, si un polinomio de grado n tiene n raíces distintas, entonces la multiplicidad de cada una de ellas debe ser 1 [10], un caso particular del resultado anterior, por su importancia práctica, es el que enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 5.2 [*Suficiencia II para la existencia de una base de* $\mathbb{R}^n$ *formada por vectores propios de una matriz*].
Si una matriz A de tamaño $n \times n$ tiene n valores propios distintos, existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz A.

Ejemplo 14. Determinemos si existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como A es una matriz triangular, por el Teorema 4, Pág. 355, sus valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$, todos de multiplicidad algebraica 1. Por el Corolario 5.2, concluimos que sí existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. En efecto, al resolver los sistemas homogéneos $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontramos que los espacios propios de A son

$$E_{(-1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_{(2)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

y

$$E_{(5)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Por el Resultado 3 del Teorema 5, concluimos que

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. □

Para terminar esta sección de conceptos básicos, veamos la relación que existe entre los valores y vectores propios de una matriz y los de la matriz que resulta al aplicarle a la matriz original algunas de las operaciones de matrices estudiadas en el Capítulo 3.

Teorema 6 [*Propiedades de los valores y vectores propios*].
Sea A una matriz de orden n y $\mathbf{v}$ un vector propio de A asociado al valor propio λ. Entonces,

1. λ es un valor propio de A^T.
2. Si A es invertible, entonces $\lambda \neq 0$ y $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $1/\lambda$.
3. $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^k asociado al valor propio λ^k.

Demostración: La demostración de estos resultados está basada en las propiedades de los determinantes y la caracterización de los valores propios como raíces del polinomio característico. Demostremos la segunda propiedad y las otras las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 10).

2. Si A es invertible, $\lambda = 0$ no puede ser un valor propio de A, porque si lo fuere, $\det(A - 0I) = \det(A) = 0$ y, por el Corolario 15.1 del Capítulo 3, Pág. 192, la matriz A no sería invertible. Además, si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A, asociado a $\lambda \neq 0$, entonces $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ o equivalentemente, $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$; es decir, $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $1/\lambda$.

Ejemplo 15. Verifiquemos los resultados del Teorema 6 para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A y A^T es $p(\lambda) = \lambda^2 - 9$ y por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, para ambas matrices.

Por ser A una matriz 2×2, no es difícil calcular su inversa, obteniendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}$, así que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \dfrac{1}{9}$ y por tanto, sus valores propios son $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = -1/3$, los inversos de los valores propios de A.

Al resolver los sistemas homogéneos $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A+3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontramos que los espacios propios de A son $E_{(3)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $E_{(-3)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. Verifiquemos que tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, como $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A^{-1}, correspondientes a los inversos de los valores propios de A, lo que, además, nos permite concluir que todos los vectores propios de A son vectores propios de A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & -1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para ilustrar él último resultado del Teorema 6, veamos que

$$A^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 36 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \end{pmatrix} = 3^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es también vector propio de A^3, pero asociado al valor propio $3^3 = 27$. □

En el ejemplo anterior, con el propósito de ilustrar los resultados del Teorema 6, calculamos A^{-1} y A^3 lo cual es innecesario en la práctica. La importancia del Teorema 6 radica precisamente en poder calcular los valores y vectores propios de A^{-1} y A^3, conociendo los de A, sin tener que calcular estas matrices.

6.5. Propiedades de las matrices semejantes

En general, hacer aritmética con matrices es costoso, sobre todo si hay que realizar multiplicaciones entre ellas. Sin embargo, los cálculos se facilitan si las matrices son triangulares y aún más si las matrices son diagonales. De otro lado, el cálculo de los valores propios de una matriz triangular y en especial si es diagonal es trivial; por ello, sería muy conveniente encontrar un procedimiento que nos permitiera relacionar los valores propios de una matriz con los de una matriz triangular o diagonal. En el Capítulo 1, vimos un procedimiento que relacionaba una matriz con una triangular (el Método de Eliminación de Gauss), pero desafortunadamente los valores propios de la matriz triangular encontrada por este método no se relacionan con los de la matriz inicial (Ejercicio 13).

Por ahora, veamos que si dos matrices son *semejantes* (ver Definición 5 del Capítulo 5, Pág. 318), algunas de sus características o propiedades son iguales; entre otras, sus valores propios son los mismos y los vectores propios de una se pueden calcular a partir de los de la otra, como lo resumimos en el siguiente teorema

Teorema 7 [*Propiedades de las matrices semejantes*].
Sean A y B dos matrices semejantes, entonces

1. $\det A = \det B$.
2. Si una de las matrices es invertible, la otra también lo es.

3. A y B tienen el mismo polinomio característico.
4. A y B tienen los mismos valores propios.
5. Existe P, una matriz invertible, tal que si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A, $P\mathbf{v}$ es un vector propio de B.
6. A y B tienen el mismo rango.

Demostración: Como A y B son semejantes, existe P, una matriz invertible, tal que $PA = BP$.

1. Puesto que $PA = BP$, $\det(PA) = \det(BP)$; es decir,

$$\det(P)\det(A) = \det(B)\det(P)$$

y por ser P invertible, $\det P \neq 0$, lo que implica que $\det A = \det B$.

2. Por el resultado anterior, $\det A \neq 0$, si y sólo si, $\det B \neq 0$, de donde concluimos que las matrices A y B son ambas invertibles o ambas no invertibles.

3. Como

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) \\ &= \det[P(B - \lambda I)P^{-1}] \\ &= \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} \\ &= \det(B - \lambda I),\end{aligned}$$

concluimos que los polinomios característicos de A y B son iguales.

4. Puesto que los polinomios característicos de A y B son iguales, sus valores propios son los mismos.

5. Sea $\mathbf{v}$ un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Multiplicando por P, tenemos $PA\mathbf{v} = \lambda P\mathbf{v}$, y por lo tanto, $BP\mathbf{v} = \lambda P\mathbf{v}$, lo cual significa que $\mathbf{z} = P\mathbf{v}$ es un vector propio de B asociado al valor propio λ.

6. La dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 12). □

6.6. Valores y vectores propios de una transformación lineal

Las propiedades sobre matrices semejantes establecidas en el teorema anterior y el hecho que dos matrices semejantes representen una misma transformación (ver Sección 5.4, Pág. 308), justifican los comentarios sobre vectores propios de una transformación lineal planteados en la introducción del presente capítulo. Empecemos definiendo valor y vector propio de una transformación lineal de un espacio vectorial en si mismo.

Definición 6 [*Valor y vector propio de una transformación lineal*]. Sean V, un espacio vectorial real finito, y $T : V \longrightarrow V$, una transformación lineal. Diremos que el escalar λ es un valor propio de T y que $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un vector propio de T asociado a λ, si y sólo si, $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 16. Si $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ es una transformación lineal tal que $T(a + bx + cx^2) = (a - b) + bx + (a - c)x^2$, podemos verificar que

$$T(2 + x^2) = 2 + x^2 = 1(2 + x^2),$$

de donde concluimos que $\lambda = 1$ es un valor propio de T y que $2 + x^2$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 1$. □

Ejemplo 17. Determinemos geométricamente los valores y vectores propios de la reflexión a través del eje Y en el plano. Observemos

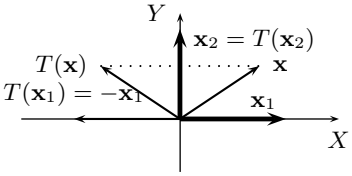


Figura 6.3: Vectores y valores propios de la reflexión a través del eje Y en el plano

que los únicos vectores que conservan su dirección están sobre los ejes coordenados. En efecto, para los vectores sobre el eje X tenemos que $T\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, por tanto son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$ y para los vectores sobre el eje Y tenemos que $T\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, por tanto son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$. □

Establezcamos ahora la relación entre la definición anterior y la Definición 1 (valor y vector propio de una matriz, Pág. 346), la cual plantea que para calcular los valores y vectores propios de una transformación lineal basta con calcular los valores y vectores propios de una matriz asociada a la transformación lineal.

Teorema 8 [*Relación entre los valores y vectores propios de una transformación y una matriz asociada*].
Sean V un espacio vectorial finito, $\mathcal{B}$ una base de V, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y A_T la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$. El escalar λ es un valor propio de T y $\mathbf{v} \in V$ es un vector propio de T asociado a λ, si y sólo si, el escalar λ es un valor propio de A_T y $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ es un vector propio de A_T asociado a λ.

Demostración: Sean λ un valor propio de T y $\mathbf{v} \in V$ un vector propio de T asociado a λ. Por la Definición 6,

$$T(\mathbf{v}) \quad = \quad \lambda\mathbf{v}. \tag{6.9}$$

Como,

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad [\lambda\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \ ,$$

reemplazando en (6.9), tenemos

$$A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

lo que significa que λ es valor propio de A_T y $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ es un vector propio de A_T asociado a λ.

En forma similar, siendo $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, si λ es valor propio de A_T y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ es un vector propio de A_T asociado a λ, podemos concluir que λ es un valor propio de T y $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$ es un vector propio de T asociado a λ. Además, observemos que $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. □

Ejemplo 18. Si T es la transformación del Ejemplo 16, $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{B}' = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$, entonces la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [2 + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}'$ es

$$B_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [2+x^2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el Ejemplo 16, vimos que $\lambda = 1$ es un valor propio de T y que $2 + x^2$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 1$. No es difícil verificar que

$$A_T[2+x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y que

$$B_T[2+x^2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de donde concluimos que $\lambda = 1$ es un valor propio tanto de A_T, como de B_T y que $[2+x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A_T asociado al valor propio $\lambda = 1$ y que $[2+x^2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de B_T asociado al valor propio $\lambda = 1$. □

Ejemplo 19. Determinemos los valores y vectores propios de la rotación de 30° alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$ (Fig. 6.4); primero, geométricamente y luego, utilizando una matriz asociada a la transformación.

Geométricamente, podemos ver que los únicos vectores que bajo la transformación conservan su dirección están en el eje Z, ya que $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, lo que nos permite concluir que los vectores contenidos en el eje Z son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$.

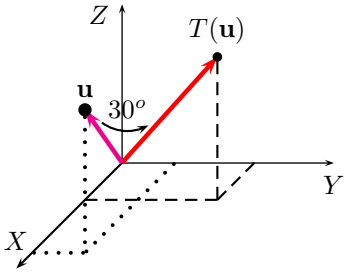


Figura 6.4: Rotación de 30º alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$

De otro lado, como $T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ver Fig. 6.5) y $T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matriz asociada a la transformación respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A_T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

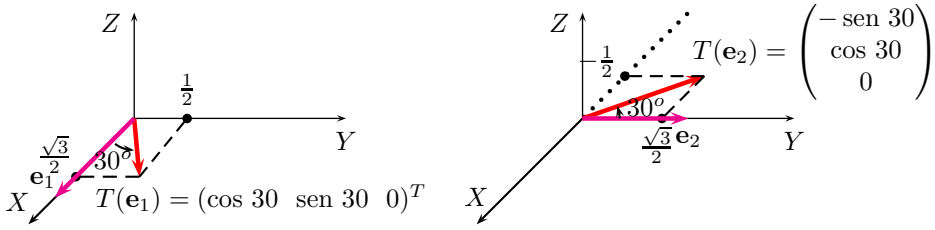


Figura 6.5: Rotación de 30º alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$ de los vectores canónicos $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$

Después de una serie de cálculos, encontramos que el polinomio característico de A_T es

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(4 - 2\sqrt{3}\lambda + \lambda^2),$$

el cuál sólo tiene una raíz real $\lambda = 1$. Los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ son las soluciones no triviales de $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, las cuales podemos verificar que son todos los múltiplos no nulos del vector $\mathbf{e}_3$;

es decir, los vectores no nulos contenidos en el eje Z, como habíamos observado geométricamente. □

Notemos que, al calcular los valores propios de la matriz asociada a la transformación lineal, obtenemos los valores propios de la transformación, pero que, al calcular los vectores propios de la matriz asociada a la transformación, obtenemos las coordenadas[8] de los vectores propios de la transformación.

6.7. Matrices diagonalizables

Como mencionamos en la introducción, si la matriz asociada a una transformación lineal fuese diagonal, seria muy fácil analizar la acción de la transformación; de allí la importancia de hallar la base en que la matriz asociada a la transformación sea diagonal, la cual sería fácil de calcular si dada una matriz podemos calcular una matriz diagonal semejante a ella. Por esta razón, el que una matriz sea semejante a una matriz diagonal, lo llamaremos de una manera especial.

Definición 7 [*Matriz diagonalizable*]. Diremos que una matriz A es *diagonalizable*, si y sólo si, existe una matriz diagonal D semejante a A; es decir, una matriz A es diagonalizable, si y sólo si, existe P, una matriz invertible, y D, una matriz diagonal, tal que

$$AP = PD.$$

Al procedimiento de encontrar la matriz diagonal D y la matriz invertible P lo llamamos proceso de *diagonalización* y decimos que P y D *diagonalizan* a A.

Teniendo en cuenta la definición de matrices semejantes (Definición 5 del Capítulo 5, Pág. 318), podemos decir que una matriz es diagonalizable, si sólo si, la matriz es semejante a una matriz diagonal. Además, como las matrices semejantes representan una misma transformación, pero en bases diferentes, si A es la matriz asociada a una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en la base canónica y es semejante a la matriz diagonal D, entonces D es la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ formada por la columnas de la matriz P, siendo P tal que $AP = PD$, la cual debe existir por la semejanza de las matrices A y D (Ejercicio 14).

[8] Dichas coordenadas son en la base usada para calcular la matriz asociada a la transformación.

En general, no es fácil interpretar, geométricamente, la acción de la transformación lineal T en la base canónica, pero si lo es en la base $\mathcal{B}$. En efecto, observemos que, como A es la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (Ejercicio 15). Además, como $AP = PD$, entonces $T(\mathbf{p}_i) = d_{ii}\mathbf{p}_i$, donde p_i es la columna i de P y d_{ii} es la componente i de la diagonal de D (Ejercicio 16); es decir, que en la dirección de las columnas de P, la transformación T "encoge" o "estira" los vectores (dependiendo si d_{ii} es menor o mayor que uno), cambiándoles o no su sentido (dependiendo si d_{ii} es negativo o positivo), como anotamos en al principio de este capítulo (ver Fig. 6.1 y 6.2, Pág. 346 y 347).

Ejemplo 20. Dada $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, verifiquemos que $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ diagonalizan a A.

Calculemos

$$AP = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como $AP = PD$, concluimos que P y D diagonalizan a A. □

Usando los datos del ejemplo anterior, observemos que las matrices P y D nos permiten interpretar geométricamente la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. En efecto, T es una transformación lineal que *cuadruplica* los vectores en la dirección de $(-1\ \ 1)^T$, primera columna de P, y *sextuplica* los vectores en la dirección de $(1\ \ 1)^T$, segunda columna de P, conservándoles el sentido en ambas direcciones.

Ahora, ¿Cómo determinar si una matriz es diagonalizable? ¿Cuáles son las matrices que diagonalizan a A? Las respuestas a estas preguntas involucran los valores y vectores propios de A como lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 9 [*Caracterización de las matrices que diagonalizan a una matriz*].
Sea A una matriz $n \times n$.

1. Si P y D son las matrices que diagonalizan a A, los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A y las columnas de la matriz P son vectores propios de A asociados a los valores propios, en su orden respectivo.
2. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de n vectores propios *l.i.* de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces la matriz A se puede diagonalizar con $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n]$ y D, la matriz diagonal tal que $d_{ii} = \lambda_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración:

1. Si

$$P = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n] \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces

$$PD = [d_{11}\mathbf{p}_1\ d_{22}\mathbf{p}_2\ \ldots\ d_{nn}\mathbf{p}_n] \quad \text{y} \quad AP = [A\mathbf{p}_1\ A\mathbf{p}_2\ \ldots\ A\mathbf{p}_n].$$

Además, si P y D son las matrices que diagonalizan a A, entonces $AP = PD$. Así que $A\mathbf{p}_1 = d_{11}\mathbf{p}_1$, $A\mathbf{p}_2 = d_{22}\mathbf{p}_2$, ..., $A\mathbf{p}_n = d_{nn}\mathbf{p}_n$. De donde, concluimos que $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ son los valores propios de A y que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ son los vectores propios de A asociados a $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$, respectivamente.

2. Si A tiene n vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que forman un conjunto de vectores *l.i.*, con valores propios correspondientes λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n y tomamos $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n]$ y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$AP = [A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \ldots \ A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] = PD,$$

de modo que A es diagonalizable y P y D diagonalizan a A. □

Ejemplo 21. Encontremos las matrices que diagonalizan la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el Ejemplo 13, Pág. 358, vimos que los valores propios de A son $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad algebraica 1 y 2, respectivamente, y que los conjuntos

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

son bases de sus respectivos espacios propios. Así que, por el Teorema 5, Pág. 356,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es un conjunto *l.i.* y, por el Teorema 9,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizan a A.

En efecto, veamos que $AP = PD$:

$$AP = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -1 & -1 \\ 20 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -1 & -1 \\ 20 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

El teorema anterior lo podemos resumir en el siguiente corolario, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 17).

Corolario 9.1 [*Caracterización de las matrices diagonalizables*].
Una matriz A es diagonalizable, si y sólo si, A tiene n vectores propios que forman un conjunto $l.i.$

Ejemplo 22. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puesto que $\lambda_1 = 0$ es un valor propio de A de multiplicidad algebraica 2 y $E_{(0)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, es decir, $\lambda_1 = 0$ es de multiplicidad geométrica 1, no hay un conjunto $l.i.$ formado por dos vectores propios de A, lo que implica que A no es diagonalizable. □

Teniendo en cuenta que si todos los valores propios son diferentes, entonces existen n vectores propios que forman un conjunto $l.i.$, tenemos una condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable, la cual expresamos en el siguiente corolario.

Corolario 9.2 [*Condición suficiente para la diagonalización de una matriz*].
Sea A una matriz $n \times n$. Si A tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

Demostración: Supongamos que A, una matriz $n \times n$, tiene n valores propios diferentes. Por el Corolario 5.2, 359, existe una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, donde cada $\mathbf{u}_i$ es un vector propio. Por ser base, el conjunto $\mathcal{B}$ es $l.i.$, luego, por el Corolario 9.1, la matriz es diagonalizable. □

Ejemplo 23. Verifiquemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Después de una serie de cálculos, tenemos que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$, por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 0$. Como A es de orden 3 y tiene 3 valores propios distintos, por el Corolario 9.2, la matriz A es diagonalizable. En efecto, después de una serie de cálculos, podemos determinar que los espacios propios de A son

$$E_{(1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_{(-1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

y

$$E_{(0)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

por lo tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalizan a A. ¿Existen otras matrices P y D que diagonalicen a A? □

Debe ser claro que para que una matriz de orden n sea diagonalizable no es necesario que todos los valores propios sean diferentes, basta con que exista un conjunto $l.i.$ formado por n vectores propios. Es decir, que el polinomio característico no tenga raíces complejas y que las multiplicidades algebraica y geométrica de cada uno de los valores propios coincidan, de tal manera que en total se tengan n vectores propios que formen un conjunto $l.i.$, lo cual formalizamos en el siguiente teorema, cuya demostración es similar a la del Corolario 5.1, Pág. 358, y la dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 19).

Teorema 10 [*Caracterización de las matrices diagonalizables*]. Sea A una matriz $n \times n$. La matriz A es diagonalizable, si y sólo si, las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A son iguales y la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios es n.

Ejemplo 24. Determinemos si la matriz A del Ejemplo 8, Pág. 351, es diagonalizable.

En el Ejemplo 8, vimos que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, con multiplicidad algebraica 2 y 1, respectivamente, y multiplicidad geométrica de uno para ambos valores propios. Por el Teorema 10, la matriz A **no** es diagonalizable, puesto que para el valor propio $\lambda_1 = 1$, la multiplicidad algebraica es diferente a su multiplicidad geométrica.

□

Al margen de los valores y vectores propios, la semejanza de una matriz A con una matriz diagonal permite simplificar enormemente el cálculo de las potencias de A, sobre todo si el tamaño de la matriz o la

potencia son grandes. En efecto, si P y D diagonalizan a A, entonces $A = PDP^{-1}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{k \text{ veces}} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDIDI\cdots IDP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

lo cual formalizamos en el siguiente teorema y demostramos usando inducción matemática.

Teorema 11 [*Cálculo de potencias de una matriz diagonalizable*]. Sean P, una matriz invertible, y D, una matriz diagonal, las matrices que diagonalizan a A. Entonces

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Demostración: Si P y D diagonalizan a A, entonces $A = PDP^{-1}$; es decir, el teorema se satisface para $k = 1$. Supongamos que el teorema se satisface para $k = r$; es decir, $A^r = PD^rP^{-1}$. Demostremos que se satisface para $k = r + 1$.

$$\begin{aligned} A^{r+1} = A^rA &= (PD^rP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= (PD^r)(P^{-1}P)(DP^{-1}) = P(D^rD)P^{-1} = PD^{r+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

□

Recordemos que, en la práctica, para calcular $A^k = PD^kP^{-1}$ es más eficiente (requiere menos operaciones) resolver los sistemas resultantes de la ecuación matricial $A^kP = PD^k$, que calcular P^{-1} y luego multiplicar PD^k por P^{-1}.

Ejemplo 25. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Verifiquemos que $A^k = I$, para todo $k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$.

Después de una serie de cálculos, encontramos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ son los valores propios de A. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente. Por el Teorema 11, $A^k = PD^kP^{-1}$,

donde $P = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2]$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

para $k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$, tenemos que $A^k = PD^kP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, para $k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$. □

6.8. Matrices simétricas y diagonalización

Debido a que las matrices simétricas satisfacen los resultados de diagonalización de manera especial, en esta sección, nos restringiremos a este tipo de matrices .

Para comenzar, tenemos que las raíces del polinomio característico de las matrices simétricas son todas reales, razón por la cual, las matrices simétricas tienen tantos valores propios (contando multiplicidades) como número de filas. Este resultado lo consignamos en el siguiente teorema, omitiendo su demostración por no estar al alcance de este texto[9].

Teorema 12 [*Número de valores propios de una matriz simétrica*]. Toda matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tiene n valores propios, contando multiplicidades.

Ejemplo 26. Verifiquemos el teorema anterior para la matriz A del Ejemplo 13. A es una matriz simétrica de tamaño 3×3 y los valores propios de A son 3, contando multiplicidades: $\lambda_1 = 10$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad algebraica 2. □

De este teorema y el Corolario 9.2, Pág. 372, podemos asegurar que si los valores propios de una matriz simétrica son diferentes, entonces la matriz es diagonalizable. Sin embargo, las matrices simétricas tienen más propiedades especiales.

En el Teorema 5, Pág. 356, los vectores propios de una matriz asociados a valores propios diferentes forman un conjunto $l.i.$ Para matrices simétricas, el resultado es más fuerte: los vectores propios asociados a valores propios diferentes resultan ser ortogonales, como la planteamos en el siguiente teorema.

[9]La demostración requiere de la definición del producto interno en los complejos: para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^n$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n,$$

donde $\bar{y}$ denota el conjugado de y ($\bar{y} = \alpha - \beta i$ si $y = \alpha + \beta i$) [11].

Teorema 13 [*Ortogonalidad de los vectores propios de una matriz simétrica*].
Si A es una matriz simétrica, los vectores propios de A asociados a valores propios diferentes son ortogonales.

Demostración: Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de A asociados a los valores propios λ y μ, respectivamente, con $\lambda \neq \mu$. Entonces,

$$\lambda \mathbf{u} = A\mathbf{u} \tag{6.10}$$

y

$$\mu \mathbf{v} = A\mathbf{v}. \tag{6.11}$$

Multiplicando (6.10) por $\mathbf{v}^T$ y (6.11) por $\mathbf{u}^T$, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v}^T\mathbf{u} &= \mathbf{v}^T A\mathbf{u} && (6.12)\\ \mu \mathbf{u}^T\mathbf{v} &= \mathbf{u}^T A\mathbf{v}. && (6.13) \end{aligned}$$

Tomando la transpuesta a ambos lados de (6.13) y como $A^T = A$, tenemos

$$\mu \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T A^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T A\mathbf{u}. \tag{6.14}$$

Restando (6.14) de (6.12), tenemos

$$(\lambda - \mu)\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$, entonces $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 0$, de donde concluimos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales. □

Ejemplo 27. Si tomamos la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, los espacios propios de A son

$$E_{(0)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\right\},$$

$$E_{(12)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} : \ s \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{y}$$

$$E_{(-6)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} : \ r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Veamos que

$$\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} = 0\,,$$

para todo $r, s, t \in \mathbb{R}$; por lo tanto, concluimos que los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$ son ortogonales a los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 12$, que los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$ son ortogonales a los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = -6$ y que los valores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 12$ son ortogonales a los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = -6$. □

Otra propiedad importante de las matrices simétricas, básica para la demostración del resultado principal de esta sección, es el que enunciamos en el siguiente teorema, cuya demostración es similar a la del Teorema 3, Pág. 352, y que también omitimos.

Teorema 14 [*Igualdad de multiplicidades de los valores propios de una matriz simétrica*]. [11]
Si A es una matriz simétrica, las multiplicidades algebraica y geométrica de cada uno de los valores propios de A son iguales.

Ejemplo 28. Volviendo sobre la matriz del Ejemplo 13,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

observemos que A tiene valores propios $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_1 = 1$, de multiplicidades algebraica 1 y 2 y multiplicidades geométricas 1 y 2, respectivamente. □

El que una matriz $n \times n$ sea diagonalizable, como nos dice el Teorema 9, Pág. 370, significa que existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz que son las columnas de la matriz P que diagonaliza a la matriz. En algunos casos especiales, las columnas de la matriz P las podemos escoger *ortonormales* o dicho de otra forma, la matriz P resulta ser ortogonal. Esta particularidad de la matriz P nos conduce a la siguiente definición.

Definición 8 [*Matriz ortogonalmente diagonalizable*]. Decimos que una matriz A es *ortogonalmente diagonalizable*, si y sólo si, existe una matriz diagonal D tal que $AQ = QD$, donde Q es una matriz ortogonal. En otras palabras, A es *ortogonalmente diagonalizable*, si y sólo si, A es diagonalizable mediante una matriz ortogonal.

Ejemplo 29. Si A es la matriz del Ejemplo 27 y

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

no es difícil verificar que $Q^TQ = I$ y $AQ = QD$, siendo D la matriz diagonal formada con los valores propios de A, de donde concluimos que A es ortogonalmente diagonalizable. □

Del Teorema 14 y el Corolario 5.1, Págs. 377 y 358, tenemos que si A es una matriz simétrica $n \times n$, existe una base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ de $\mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i$ es una base del espacio propio correspondiente al valor propio λ_i. Podemos suponer que cada una de las bases $\mathcal{B}_i$ es ortonormal (si no lo son, con el Proceso de Grand-Schmidt, las podemos ortonormalizar). Puesto que el Teorema 12 nos dice que los vectores propios asociados a valores propios diferentes de una matriz simétrica son ortogonales, concluimos que podemos construir a $\mathcal{B}$ como una base ortonormal de vectores propios de A. En otras palabras, tomando la matriz Q como la matriz de los vectores de $\mathcal{B}$, podemos concluir que la matriz A es diagonalizable por Q, demostrando una de las implicaciones del principal resultado de esta sección, expresado en el siguiente teorema.

Teorema 15 [*Caracterización de una matriz simétrica*].
Una matriz A es simétrica, si y sólo si, A es ortogonalmente diagonalizable.

Demostración: Nos queda por demostrar únicamente que si A es ortogonalmente diagonalizable, entonces A es simétrica. Que A sea ortogonalmente diagonalizable significa que

$$A = QDQ^T, \tag{6.15}$$

donde Q es una matriz ortogonal (recordemos que si Q es ortogonal, entonces $Q^{-1} = Q^T$). Por lo tanto,

$$A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T = A,$$

de donde concluimos que A es simétrica. □

Ejemplo 30. Volviendo sobre la matriz del Ejemplo 27, tenemos que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, conformada por vectores propios de A. Al normalizar cada uno de los vectores de $\mathcal{B}$, obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Si tomamos

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

como vimos en el ejemplo anterior, Q y la matriz diagonal formada con los valores propios de A diagonalizan a A. □

6.9. Ejercicios

Antes de hacer los ejercicios que se proponen en esta sección, revise los conceptos nuevos que se presentaron en este capítulo.

Conceptos	Página	Conceptos	Página
Vector propio de una matriz	346	Matrices semejantes	362
Valor propio de una matriz	346	Vector propio de una transformación	364
Polinomio característico	349	Valor propio de una transformación	364
Multiplicidad algebraica	350	Matriz diagonalizable	368
Espacio propio	351	Proceso de diagonalización	368
Multiplicidad geométrica	351	Matriz ortogonalmente diagonalizable	378

1. Determine cuáles de los vectores dados son vectores propios de la matriz A dada y en caso de serlo, identifique los valores propios asociados.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Determine cuáles de los escalares dados son valores propios para la matriz A dada.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = -6$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_4 = \dfrac{2}{5}$.

3. Demuestre el Teorema 2, Pág. 349.

4. ¿Cuáles son las multiplicidades algebraicas de los valores propios de la matriz del Ejemplo 2, Pág. 348?

5. Determine los valores propios, sus multiplicidades algebraicas y sus multiplicidades geométricas, para cada una de las matrices dadas.

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Complete la demostración del Teorema 5, Pág. 356.

7. Determine, para cada una de las matrices del Ejercicio 5, en qué casos existe una base de $\mathbb{R}^n$, para el correspondiente valor de n, conformada por vectores propios de la matriz A. En caso de existir, exhíbala.

8. Demuestre el Corolario 5.1, Pág. 358.

9. Determine, para cada una de las matrices del Ejercicio 5, los valores y vectores propios de A^T, A^{-1}, $3A$, A^5 y $A - 4I$.

10. Complete la demostración del Teorema 6, Pág. 360.

11. Conteste **falso** o **verdadero** a cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

a) Los valores propios de una matriz son raíces de su polinomio característico.

b) Las raíces del polinomio característico de una matriz son sus valores propios.

c) Si 0 es un valor propio de una matriz A, entonces A es la matriz nula.

d) Toda matriz $n \times n$ tiene n valores propios, contando sus multiplicidades algebraicas.

e) Todos los valores propios de una matriz nula son 0.

f) Cualquier vector de $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ es vector propio de la matriz nula $n \times n$.

g) Si dos matrices tienen los mismos valores propios, entonces sus vectores propios son los mismos.

h) Para que exista una base de $\mathbb{R}^n$, conformada por vectores propios de una matriz $n \times n$, todos sus valores propios deben ser diferentes.

i) Para conocer los valores propios de la matriz inversa de A no es necesario encontrar la inversa.

j) La matriz $5I_n$ tiene sus n valores propios iguales a 5.

12. Demuestre el Punto 6 del Teorema 7, Pág. 362.

13. Respecto a las matrices del Ejercicio 1

a) Calcule los valores y vectores propios de las matrices.

b) Calcule una matriz escalonada equivalente a cada una de las matrices (AYUDA: Use el algoritmo de eliminación de Gauss visto en el Capítulo 1).

c) Calcule los valores y vectores propios de las matrices obtenidas en el punto anterior.

d) Compare los valores y vectores propios de las matrices y los de las matrices escalonadas equivalentes. ¿Qué puede concluir?

14. Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Demuestre que si A es la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y A es semejante a la matriz diagonal D, entonces D es la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ formada por la columnas de P, siendo P la matriz tal que $AP = PD$.

15. Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Demuestre que A es la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, si sólo si, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

16. Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Demuestre que si A es la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $AP = PD$, para alguna matriz invertible P y una matriz diagonal D, entonces $T(\mathbf{p}_i) = d_{ii}\mathbf{p}_i$, donde p_i es la columna i de P y d_{ii} es la componente i de la diagonal de D (AYUDA: Utilice el resultado del Ejercicio 15).

17. Demuestre el Corolario 9.1, Pág. 372.

18. En $\mathbb{R}^3$, ¿Cuáles son los valores y vectores propios de la Proyección Ortogonal sobre una recta? ¿Sobre un plano? (Resuelva el mismo problema en $\mathbb{R}^4$)

19. Demuestre el Teorema 10, Pág. 373.

20. En cada caso, con la información dada sobre la matriz A de tamaño $n \times n$, determine si A es diagonalizable, ortogonalmente diagonalizable, invertible y/o simétrica y el valor de n.

    a) El polinomio característico de A es $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+\sqrt{2})\lambda$.

    b) El polinomio característico de A es $p(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

    c) El polinomio característico de A es $p(\alpha) = (\alpha-4)^2(\alpha+2)^3$.

    d) Los espacios propios de A son

$$E_{(2)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } E_{(-1)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

    e) Los espacios propios de A son

$$E_{(3)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } E_{(0)} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

g) Los espacios propios de A son $A_{(4)} = Gen\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ y $A_{(-2)} = Gen\{\mathbf{w}\}$, siendo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

21. Dada A una matriz cuadrada tal que $A = PQ$, donde P es invertible, demuestre que $B = QP$ es una matriz semejante a A. (NOTA: Esta propiedad es importante en el desarrollo de algoritmos numéricos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz. [6], [15])

22. Demuestre que si A es una matriz diagonalizable cuyos valores propios son 1 y -1, entonces A es invertible y $A^{-1} = A$. Además,

$$A^k = \begin{cases} A & \text{si } k \text{ es impar} \\ I & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} .$$

(AYUDA: Ver Ejemplo 25, Pág. 374)

23. Conteste **falso** o **verdadero**, justificando su respuesta.

a) Si una matriz 5×5 tiene 5 valores propios diferentes, es diagonalizable.

b) Si $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal y A es su matriz asociada en la base canónica, los valores y vectores propios de A son los valores y vectores propios de T.

c) Si $T : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ es una transformación lineal y A es su matriz asociada en una base diferente a la canónica, los valores y vectores propios de A son los valores y vectores propios de T.

d) Si $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ es una transformación lineal , T no tiene valores ni vectores propios.

e) Si $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{P}_4$ es una transformación lineal , T no tiene valores ni vectores propios.

f) Si A es simétrica, A es diagonalizable.

g) Si $A = A^T$ es una matriz de tamaño 5×5, A tiene 5 valores propios diferentes.

h) Si $A = A^T$ es una matriz de tamaño 9×9, A tiene 9 vectores propios que forman un conjunto ortogonal.

i) Si $A = A^T$ es una matriz de tamaño 7×7, cualquier conjunto de 7 vectores propios es ortogonal.

j) Las matrices que diagonalizan una matriz dada son únicas.

Apéndice A

FACTORIZACIÓN PLU

A.1. Introducción

En la Sección 3.8, obtuvimos la factorización LU de una matriz A dada, la cual se obtiene de una formulación matricial del algoritmo de eliminación de Gauss y nos proporciona una forma equivalente más eficiente de calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales en los casos que dicha factorización exista.

En la eliminación de Gauss, cuando no son necesarias las operaciones elementales de Tipo Permutación, como en el Ejemplo 22 (Parte A) del Capítulo 3, Pág. 169, demostramos que, al pre-multiplicar (en el orden apropiado) por las inversas de las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales usadas en la eliminación ambos lados de la expresión

$$E_k \cdots E_1 A = U,$$

obtenemos

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU,$$

donde U es una matriz triangular superior y $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ es una matriz de orden n, triangular inferior, invertible y con unos en la diagonal, por ser el producto de matrices de orden n, triangulares inferiores, invertibles y con unos en la diagonal (Ver Pág. 172). Además, los elementos diferentes de cero de la matriz L son los opuestos de los escalares o multiplicadores involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación usadas en la eliminación de Gauss.

En dicha sección, vimos que obtener la matriz L **no** requiere cálculo adicional como parece hacer creer la fórmula que la define. La matriz L es muy fácil de obtener gracias a que el producto de matrices elementales del Tipo Eliminación es prácticamente una *superposición de escalares* sobre una matriz idéntica cuando el factor izquierdo tiene su escalar en la misma columna o en una columna que antecede a la columna donde está el escalar del factor derecho. Observemos que las matrices elementales que definen a L tienen esta propiedad (el opuesto de los escalares o multiplicadores aparece porque la matriz L está definida como producto de las inversas de las matrices elementales). Todo lo anterior está ilustrado en el Ejemplo 23 del Capítulo 3, Pág. 172.

Desafortunadamente, cuando en la Eliminación de Gauss aplicada a una matriz A se requieren operaciones o matrices de Tipo Permutación, la factorización LU no existe para la matriz A. En esta sección, mostramos que en general, cuando se utilicen, por necesidad o sin ella, operaciones o matrices de Tipo Permutación en la Eliminación de Gauss aplicada a una matriz A, a cambio de la factorización LU, podemos calcular la factorización PLU de A, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior, tales que $PA = LU$; es decir, obtenemos la factorización LU de la matriz que se obtiene de A permutando adecuadamente sus filas. En el siguiente ejemplo, podemos ver que por conveniencia, en unos casos, y por necesidad en otros, usamos operaciones elementales Tipo Permutación en la Eliminación de Gauss aplicada a una matriz A dada; sin embargo, podemos calcular la factorización LU, no de la matriz A, sino de la matriz PA, donde P es una matriz de permutación adecuada. Este proceso lo llamamos factorización PLU de la matriz A.

Ejemplo 1. Usemos la Eliminación de Gauss para calcular una matriz escalonada equivalente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

y luego, calculemos la factorización PLU de A.

Podemos ver que, aplicando las siguientes operaciones elementales

$$\begin{array}{lll} F_1 \longleftrightarrow F_2, & F_2 - 3F_1 \longrightarrow F_2, & F_4 - 2F_1 \longrightarrow F_4, \quad F_5 + F_1 \longrightarrow F_5 \\ F_2 \longleftrightarrow F_4, & F_3 - 0{,}5F_2 \longrightarrow F_3, & F_5 - F_2 \longrightarrow F_5 \\ F_3 \longleftrightarrow F_4, & F_5 + 6F_3 \longrightarrow F_5 & \\ & F_5 + 7F_4 \longrightarrow F_5, & \end{array}$$

obtenemos la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es escalonada y equivalente a la matriz A.

Finalmente, por multiplicación directa, podemos verificar que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenida como el producto de las matrices correspondientes a las operaciones elementales Tipo Permutación, y

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenida de los escalares involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación, como se indicará mas adelante. □

A.2. Existencia y cálculo de la factorización PLU

Para demostrar la existencia y el cálculo de la factorización PLU de una matriz A de orden $m \times n$, primero, observemos que después de cada posible operación de Tipo Permutación, se sigue un grupo de operaciones de Tipo Eliminación cuyas matrices elementales tienen

como producto una matriz de la forma $I + \mathbf{u}\mathbf{e}_i^T$, donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{e}_i$ es el $i-$ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^m$. Luego, veamos que, aunque las operaciones de Tipo Permutación aparecen intercaladas con los grupos de operaciones de Tipo Eliminación mencionadas anteriormente, es posible "**reordenar**" todas la operaciones de tal forma que las operaciones de Tipo Permutación queden seguidas y junto a la matriz A. Finalmente, con base en estos dos resultados que demuestran la existencia de la factorización PLU, presentamos el algoritmo que permite calcular las matrices $P,\ L$ y U de la factorización PLU.

Para lo primero, según el Algoritmo 1, Pág. 14, observemos que mediante la eliminación de Gauss aplicada a una matriz A de orden $m \times n$, siempre es posible obtener una matriz escalonada equivalente a A mediante operaciones elementales de Tipo Eliminación y Permutación; es decir, es posible obtener U, una matriz triangular superior, pre-multiplicando sucesivamente la matriz A por matrices elementales apropiadas de Tipo Eliminación y Permutación, lo cual podemos resumir en la siguiente ecuación

$$E_{k_j} \cdots E_{k_{j-1}+1} P_j \cdots E_{k_2} \cdots E_{k_1+1} P_2 E_{k_1} \cdots E_1 P_1 A = U, \qquad \text{(A.1)}$$

donde E_i es una matriz Tipo Eliminación y P_i es una matriz Tipo Permutación.

Observemos que $E_{k_i} \cdots E_{k_{i-1}+1}$, el producto de las matrices elementales Tipo Eliminación que introducen los ceros debajo del pivote de la fila i, es una matriz de la forma $I + \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i^T$, donde $\mathbf{e}_i$ es el $i-$ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{u}_i$ es el vector de $\mathbb{R}^m$ cuyas primeras i componentes son cero y el resto son los escalares o multiplicadores utilizados en las operaciones elementales correspondientes (la componente j de $\mathbf{u}_i$ corresponde al escalar de la operación elemental que introdujo el cero en la fila j debajo del pivote de la fila i); además, observemos que este producto es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, como lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Con los datos del Ejemplo 1, identifiquemos las matrices de permutación y los grupos de matrices elementales Tipo Eliminación que pre-multiplican a cada una de ellas. Verifiquemos también la forma del producto de cada uno de estos grupos de matrices.

Las siguientes son las matrices de permutación (correspondientes a las operaciones elementales Tipo Permutación), el correspondiente grupo de matrices que las pre-multiplican y el producto del grupo de

matrices.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_1 &= E_1E_2E_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \mathbf{u}_1\mathbf{e}_1^T, \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_2 = E_4E_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \mathbf{u}_2\mathbf{e}_2^T, \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \mathbf{u}_3\mathbf{e}_3^T, \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$P_4 = I$ (No hubo permutación),

$$M_4 = E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = I + \mathbf{u}_4\mathbf{e}_4^T, \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

□

En general, para simplificar la notación y hacer más fácil las demostraciones que siguen, llamemos M_i al producto de cada uno de los grupos de matrices elementales Tipo Eliminación que pre-multiplican las matrices de permutación. Con esta notación, podemos reescribir la ecuación (A.1) así

$$M_j P_j \cdots M_2 P_2 M_1 P_1 A = U, \tag{A.2}$$

donde $M_i = I + \mathbf{u}_i\mathbf{e}_i^T$ es el producto de las matrices elementales Tipo Eliminación que introducen los ceros debajo del pivote de la fila i y P_i es la matriz Tipo Permutación que determina el pivote de la fila i.

Ahora, podemos demostrar que, aunque las operaciones de Tipo Permutación aparecen intercaladas con las matrices M_i, es posible "**reordenar**" todas la operaciones de tal forma que las operaciones de Tipo Permutación queden seguidas y junto a la matriz A. Para ello, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1 [*Quasi-permutación de las matrices de permutación y las matrices elementales Tipo Eliminación*].
Sean P_j una matriz elemental Tipo Permutación correspondiente a una operación elemental $F_j \longleftrightarrow F_k$, con $j \leq k$ y $M_i = I + \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i^T$ una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $j > i$. Entonces, $P_j M_i = \bar{M}_i P_j$, siendo $\bar{M}_i = I + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T$ y $\bar{\mathbf{u}}_i = P_j \mathbf{u}_i$.

Demostración: Por multiplicación directa, tenemos

$$P_j M_i = P_j(I + \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i^T) = P_j + (P_j \mathbf{u}_i)\mathbf{e}_i^T = P_j + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T.$$

Teniendo en cuenta que $P_j P_j = I$ y que $\mathbf{e}_i^T P_j = \mathbf{e}_i^T$, ya que $j > i$, concluimos que

$$P_j M_i = (I + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T P_j) P_j = (I + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T) P_j = \bar{M}_i P_j.$$

Además, observemos que, como $j \leq k$, $\bar{\mathbf{u}}_i$ conserva la propiedad de tener sus primeras i componentes iguales a cero y, por lo tanto, $\bar{M}_i$ es también una matriz triangular con unos en la diagonal. □

Ejemplo 3. Usando los resultados del Ejemplo 2, calculemos las matrices $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ y $\tilde{M}_1$ tales que

$$P_3 M_1 = \bar{M}_1 P_3, \quad P_3 M_2 = \bar{M}_2 P_3 \quad \text{y} \quad P_2 M_1 = \tilde{M}_1 P_2.$$

Usando el resultado del teorema anterior, tenemos

$$\bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \bar{\mathbf{u}}_1 \mathbf{e}_1^T, \text{ donde } \bar{\mathbf{u}}_1 = P_3 \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \bar{\mathbf{u}}_2 \mathbf{e}_2^T, \text{ donde } \bar{\mathbf{u}}_2 = P_3 \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \tilde{\mathbf{u}}_1 \mathbf{e}_1^T, \text{ donde } \tilde{\mathbf{u}}_1 = P_2 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, por multiplicación directa, podemos verificar que

$$P_3 M_1 = \bar{M}_1 P_3, \quad P_3 M_2 = \bar{M}_2 P_3 \quad \text{y} \quad P_2 M_1 = \tilde{M}_1 P_2.$$

□

Aplicando el Teorema 2 sucesivamente, podemos escribir la Ecuación (A.2) así

$$\bar{M}_j \cdots \bar{M}_2 \bar{M}_1 P_{j-1} \cdots P_2 P_1 A = U, \tag{A.3}$$

donde $\bar{M}_i$ es la matriz $M_i = I + \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i^T$ afectada por la quasi-permutación con las matrices de permutación P_k, para $k > i$; es decir,

$$\bar{M}_i = I + \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T, \quad \text{donde} \quad \bar{\mathbf{u}}_i = P_j \cdots P_{i+1} \mathbf{u}_i. \tag{A.4}$$

Finalmente, pre-multiplicando ambos lados de la Ecuación (A.3) por las inversas de las matrices $\bar{M}_i$ (en el orden apropiado), obtenemos

$$PA = P_{j-1} \cdots P_2 P_1 A = \bar{M}_1^{-1} \bar{M}_2^{-1} \cdots \bar{M}_j^{-1} U = LU, \tag{A.5}$$

donde $P = P_{j-1} \cdots P_2 P_1$, U es una matriz triangular superior y $L = \bar{M}_1^{-1} \cdots \bar{M}_j^{-1}$ es una matriz triangular inferior, invertible y con unos en la diagonal, por ser el producto de matrices triangulares inferiores, invertibles y con unos en la diagonal, ya que, por multiplicación directa, podemos verificar que $\bar{M}_i^{-1} = I - \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{e}_i^T$. Además, los elementos diferentes de cero de la matriz L son los opuestos de los escalares o multiplicadores involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación usadas en la eliminación de Gauss, ordenados adecuadamente según las permutaciones realizadas, como lo indicamos mas adelante.

Todo lo anterior es la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2 [*Factorización o descomposición PLU*].
Sean A, una matriz de tamaño $m \times n$, y U, una matriz escalonada equivalente a A, obtenida mediante el método de Eliminación de Gauss. Entonces, existen matrices P y L tales que

$$PA = LU,$$

donde P es el producto de las matrices de permutación correspondientes a las operaciones Tipo Permutación realizadas y L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal de tamaño $m \times m$, cuyas componentes debajo de la diagonal están dadas por los opuestos de las correspondientes componentes de los vectores $\bar{\mathbf{u}}_i$ que definen las matrices $\bar{M}_i$ de la ecuación (A.4). A esta factorización la llamamos *factorización PLU* o *descomposición PLU* de A.

Ejemplo 4. Con los datos y resultados de los Ejemplos 1 y 2, Págs. 388 y 390, calculemos la factorización PLU de la matriz A.

La matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene aplicando la Eliminación de Gauss a A (Ejemplo 1).

La matriz

$$P = P_4P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde P_i son las matrices de permutación dadas en el Ejemplo 2.

Para obtener la matriz L, debemos calcular los vectores $\bar{\mathbf{u}}_i$ que definen las matrices $\bar{M}_i$ de la ecuación (A.4), con base en las matrices de permutación y los vectores $\mathbf{u}_i$ dados en el Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_1 &= P_4P_3P_2\mathbf{u}_1 = (0 \ \ -2 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 1)^T, \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= P_4P_3\mathbf{u}_2 = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -0{,}5 \ \ -1)^T, \\ \bar{\mathbf{u}}_3 &= P_4\mathbf{u}_3 = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 6)^T \ \text{ y} \\ \bar{\mathbf{u}}_4 &= \mathbf{u}_4 = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 7)^T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para terminar, podemos verificar, por multiplicación directa que $PA = LU$. □

Finalmente, veamos como organizar los cálculos para obtener eficientemente las matrices de la factorización PLU y ejemplifiquemos

el uso de esta factorización en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Para lo primero, observemos que la matriz P, por ser el producto de matrices que corresponden a operaciones elementales Tipo Permutación, se obtiene mediante la aplicación de dichas operaciones elementales a la matriz idéntica; es decir que la matriz P tiene las filas de la matriz idéntica en el orden indicado por el vector $\bar{\mathbf{w}} = P_j \cdots P_2 P_1 \mathbf{w}$, donde $\mathbf{w} = (1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; m)^T$ es el vector que indica el orden de las filas de la matriz idéntica. En otras palabras, debemos permutar las correspondientes componentes del vector $\mathbf{w}$ cada vez que hagamos una permutación en la Eliminación de Gauss.

Observemos también que como los elementos debajo de la diagonal de la matriz L se obtienen de los vectores $\bar{\mathbf{u}}_i = P_j \cdots P_{i+1} \mathbf{u}_i$ (Ecuación A.4) y los vectores $\mathbf{u}_i$ están formados por ceros (las primeras i componentes) y por los escalares o multiplicadores involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación, durante la Eliminación de Gauss, podemos ir construyendo las columnas de la matriz L como en la factorización LU (unos en la diagonal, ceros encima y los opuestos de los escalares involucrados en las operaciones elementales Tipo Eliminación) y permutar las correspondientes filas de las columnas construidas cuando hagamos una permutación en la Eliminación de Gauss, como lo ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Apliquemos el procedimiento descrito para calcular la factorización PLU de la matriz A dada en el Ejemplo 1, Pág. 388.

Sea el vector $\mathbf{w} = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)^T$. Por conveniencia, permutemos las filas 1 y 2 ($F_1 \longleftrightarrow F_2$). (Igualmente, las componentes 1 y 2 de $\mathbf{w}$).

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Introduzcamos ceros debajo del pivote de la primera fila ($F_2 - 3F_1 \longrightarrow F_2$, $F_4 - 2F_1 \longrightarrow F_4$, $F_5 + F_1 \longrightarrow F_5$). (Calculamos la primera columna de L con los opuestos de los escalares de estas operaciones elementa-

les).

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & \\ 0 & \\ 2 & \\ -1 & \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Permutemos las filas 2 y 4 ($F_2 \longleftrightarrow F_4$). (Igualmente, las filas 2 y 4 de L y las componentes 2 y 4 de $\mathbf{w}$).

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & \\ 0 & \\ 3 & \\ -1 & \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{w}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Introduzcamos ceros debajo del pivote de la segunda fila ($F_3 - 0{,}5F_2 \longrightarrow F_3$, $F_5 - F_2 \longrightarrow F_5$). (Calculamos la segunda columna de L con los opuestos de los escalares de estas operaciones elementales).

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{w}}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Permutemos las filas 3 y 4 ($F_3 \longleftrightarrow F_4$). (Igualmente, las filas 3 y 4 de L y las componentes 3 y 4 de $\mathbf{w}$)

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{w}}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Introduzcamos ceros debajo del pivote de la tercera fila ($F_5 + 6F_3 \longrightarrow F_5$). (Calculamos la tercera columna de L con los opuestos de los

escalares de estas operaciones elementales).

$$U_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}, \quad L_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{w}}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, introduzcamos ceros debajo del pivote de la cuarta fila ($F_5 + 7F_4 \longrightarrow F_5$). (Calculamos la cuarta columna de L con los opuestos de los escalares de estas operaciones elementales y la última columna de L es $\mathbf{e}_5$).

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Con el vector $\bar{\mathbf{w}}$, podemos calcular la matriz

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_4^T \\ \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_5^T \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{e}_i$ es el $i-$ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^5$. Observemos que esta expresión de P es suficiente para calcular $P\mathbf{b}$, siendo $\mathbf{b}$ un vector de

$\mathbb{R}^5$ dado; en efecto,

$$P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^T\mathbf{b} \\ \mathbf{e}_4^T\mathbf{b} \\ \mathbf{e}_1^T\mathbf{b} \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{b} \\ \mathbf{e}_5^T\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_4 \\ b_1 \\ b_3 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en la factorización LU, Pág. 171, entre otros usos, esta factorización permite resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, reduciendo su solución a la solución de dos sistemas de ecuaciones lineales que podemos resolver fácilmente. Sabiendo que $PA = LU$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se convierte en $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, multiplicando ambos lados por P, y luego, reemplazando PA por LU, tenemos $LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, lo cual es equivalente a $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$, donde $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$; por lo tanto, para calcular $\mathbf{x}$, primero reordenamos el vector $\mathbf{b}$, según lo indica el vector $\bar{\mathbf{w}}$ ($\bar{\mathbf{b}} = P\mathbf{b}$), luego resolvemos

$$L\mathbf{y} = \bar{\mathbf{b}}$$

y a continuación resolvemos

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Como con la factorización LU, observemos que los dos sistemas de ecuaciones lineales anteriores son fáciles de resolver. Por ser L una matriz triangular inferior, el primer sistema se resuelve mediante *sustitución hacia adelante*; además, por ser cuadrada y tener unos en la diagonal, es una matriz invertible; por lo tanto, su solución siempre es única. Por ser U una matriz triangular superior, el segundo sistema se resuelve mediante *sustitución hacia atrás*.

La factorización PLU tiene dos grandes ventajas sobre la factorización LU. Primero, siempre existe para cualquier matriz A; y segundo, las permutaciones, que no involucran operaciones de suma ni multiplicación, nos permiten tener como pivotes números *convenientes* bien sea para facilitar las operaciones siguientes o para disminuir el error de redondeo en las operaciones de punto flotante usados en las máquinas de cómputo como calculadores o computadores, lo cual es un tema importante en los cursos de Análisis Numérico [6], [15].

BIBLIOGRAFÍA

[1] Dorf, R.C y Svoboda, J.A., *Circuitos eléctricos: Introducción al análisis y diseño*, Tercera Edición, Alfaomega Grupo Editor, 2000.

[2] Dorier, J-L. *On the Teaching of Linear Algebra*, Matehmatics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] Ferris, M.C., Mangasarian, O.L. & Wright, S.J. *Linear Programming with MATLAB*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2007

[4] Fraleigh J.B. y Beauregard, R.A. *Álgebra Lineal*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 1ª Edición, 1989.

[5] Gallian, J.A *Contemporary Abstrac Alebra*. Editorial D.C. Heath and Co., 2ª Edición, 1990.

[6] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1983.

[7] Grossman, S. I. *Álgebra Lineal*. Editorial McGraw-Hill, 5ª Edición, 1998.

[8] Hager, W.W. *Applied Numerical Linear Algebra*, Prentice Hall, 1988.

[9] Haeussler, E.F., Jr, R.S. Paul y R.S. Wood *Matemáticas para Administración y Economia*. Editorial Pearson Education, 12ª Edición, 2008.

[10] Herstein, I.N. *Abstract Algebra*. Editorial Jhon Wiley & Sons, 3ª Edición, 1999.

[11] Herstein, I.N. and Winter, D.J. *Álgebra Lineal y Teoría de Matrices*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1989.

[12] Hoffman K. y Kunze R. *Álgebra Lineal*. Editorial Prentice-Hall, 2ª Edición, 1991.

[13] Kolman, B. and Hill, D.R. *Álgebra Lineal*. Editorial Pearson Education, 8ª Edición, 2006.

[14] Lay, D.C. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Editorial Pearson Education, 3ª Edición, 2007.

[15] Martínez, H.J. y Pérez, R. *Introducción al Álgebra Lineal Numérica*. Universidad del Cauca, 1990.

[16] Nakos G. y Joyner D. *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Editorial Thompson, 1ª Edición, 1999.

[17] Stewart, J., *Cálculo de varias variables: Conceptos y contextos*, Cuarta Edición, Cengage earning Editores, 2010.

[18] Strang, G. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 2ª Edición, 1986.

[19] Young, H.D. y Freedman, R.A., *Sears - Zemansky física universitaria, Vol I*, Pearson Education, 2009.

[20] Zill, D.G. y Wright, W.S., *Cálculo de varias variables*, Cuarta Edición, McGraw-Hill, 2011.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Ángulo
  agudo, 77
  entre hiperplanos, 134
  entre planos, 136
  entre rectas, 131
  entre una recta y un hiperplano, 133
  entre una recta y un plano, 136
  entre vectores de R^n, 76
  obtuso, 77
  recto, 77
Área de un paralelogramo, 110

Base, 231
  canónica
    de $\mathbb{R}^n$, 231, 241
    de $\mathcal{M}_{m\times n}$, 232
    de $\mathcal{P}_n$, 232
  estándar
    de $\mathbb{R}^n$, 231
    de $\mathcal{M}_{m\times n}$, 232
    de $\mathcal{P}_n$, 232
  ortogonal, 267
  ortonormal, 267

Codominio, 295
Cofactor, 182
Columna, 10, 140
  pivotal, 13
Combinación lineal, 219
  coeficientes, 219
  trivial, 53, 219
Combinación lineal en R^n, 53
Componente
  de un vector, 46
  de una matriz, 140
  ortogonal, 80, 271
Conjunto
  de vectores linealmente dependiente, 65, 224
  de vectores linealmente independiente, 65, 224
  generado, 55, 220
  generador, 55, 220
  imagen, 295
  ortogonal, 264
  ortonormal, 267
  solución, 2, 6
    infinito, 7
    unitario, 7
    vacío, 7

Descomposición
  LU, 174
  PLU, 394
  QR, 277
Desigualdad
  Cauchy-Schwarz, 74
  triangular, 75
Determinante, 181
  expansión de Laplace, 184
Diagonalización, 368
  ortogonal, 378
Dimensión, 236
Dominio, 295

Ecuación, 2
cambio de base, 250
lineal, 3
homogénea, 4
homogénea asociada, 4
normal del plano, 112
pivote, 3
solución, 2
variable pivotal, 3
vectorial
de la recta, 83
del plano, 92
Ecuaciones
normales, 273
paramétricas
de la recta, 83
del plano, 93
simétricas de la recta, 90
Eigen valor, 346
Eigen vector, 346
Eliminación de Gauss, 13
Espacio
columna, 62
fila, 259
nulo de una matriz, 60
propio, 351
vectorial, 212
Espacios vectoriales isomorfos, 322

Factorización
LU, 174
PLU, 172, 394
QR, 277
Fila, 10, 140

Gauss
algoritmo, 14
eliminación, 13
Gauss-Jordan, algoritmo, 26
Gram-Schmidt, ortogonalización, 275

Hiperplano, 103
Hiperplanos
ortogonales, 104
paralelos, 104

Identidad de Lagrange, 109
Imagen de una transformación lineal, 306
Isomorfismo, 322

Longitud de un vector, 72

Método
de eliminación de Gauss, 14
de Gauss-Jordan, 25
de solución de un sistema de ecuaciones lineales, 25
Mínimos Cuadrados Lineales, 273
Magnitud de un vector, 72
Matrices
equivalentes, 12
iguales, 142
semejantes, 318, 362
Matriz, 140
adjunta, 195
determinante de la, 198
asociada a una transformación lineal, 308
aumentada
conjunta, 29
de un sistema, 10
cambio de base, 246
cero, 142
cofactor, 182
componente, 140
de coeficientes del sistema, 10
de Hilbert, 43
de transición, 246
de Vandermonde, 209
del sistema, 10

diagonal, 141
diagonalizable, 368
elemental, 164
inversa, 167
escalar, 141
escalonada, 13
reducida, 25, 170
idéntica, 141
idempotente, 205
identidad, 141
inversa, 154
invertible, 154
menor, 181
nilpotente, 205
nula, 142
nulidad, 253
orden, 140
ortogonalmente diagonalizable, 378
producto, 146
producto por escalar, 143
rango, 253
simétrica, 164
singular, 154
suma, 143
tamaño, 140
transpuesta, 161
traza, 210
triangular
inferior, 141
superior, 141
valor propio, 346
vector propio, 346
Menor, 181
Multiplicidad, 350
algebraica, 350
geométrica, 351

Núcleo de una transformación lineal, 305

Norma de un vector, 71
Nulidad
de una matriz, 253
de una transformación lineal, 314

Operaciones elementales
entre ecuaciones, 10
entre filas, 11
Ortogonalidad
a un subespacio, 269
entre vectores, 78

Paralelepípedo
volumen, 111
Paralelogramo
área, 110
Patrón escalonado, 22
Pivote, 3, 13
Plano, 91
vector normal, 112
vectores directores, 91
Planos
iguales, 98
ortogonales, 113
paralelos, 96, 113
Polinomio característico, 349
Producto
$A\mathbf{x}$, 58
cruz, 106
escalar, 68
interno, 68
mixto, 111
por escalar
entre matrices, 143
entre transformaciones lineales, 326
entre vectores de $\mathbb{R}^n$, 50
punto, 68
vectorial, 105, 206

Proyección ortogonal
sobre un subespacio, 271
sobre un vector, 79

Rango
de una matriz, 253
de una transformación lineal, 314
Recta, 82
vector director, 82
Rectas
iguales, 88
ortogonales, 88
paralelas, 86
Regla de Crammer, 207

Segmento dirigido, 48
Segmentos dirigidos iguales, 48
Sistema de ecuaciones lineales, 5
consistente, 8
equivalentes, 8
homogéneo, 5
homogéneo asociado, 5
inconsistente, 8
solución, 6
Solución
de un sistema de ecuaciones lineales, 6
de una ecuación, 2
simultánea de sistemas de ecuaciones lineales, 29
Subespacio, 217
ortogonalidad, 269
proyección ortogonal de un vector, 271
Sustitución
hacia adelante, 174, 399
hacia atrás, 8
algoritmo, 22

Transformación lineal, 296
idéntica, 302
imagen, 306
inversa, 332
invertible, 332
inyectiva, 318
matriz asociada, 308
núcleo, 305
nula, 302
nulidad, 314
rango, 314
sobreyectiva, 321
valor propio, 364
vector propio, 364
Transformaciones lineales
composición, 329
producto por escalar, 326
suma, 326
Traza, 210

Valor característico, 346
Valor propio
de una transformación lineal, 364
de una matriz, 346
multiplicidad algebraica, 350
multiplicidad geométrica, 351
Vandermonde, matriz de, 209
Variable
libre, 16
pivotal
de un sistema, 16
de una ecuación, 3
Vector, 212
ángulo, 76
de $\mathbb{R}^n$, 46
director de la recta, 82
cero, 46
componentes, 46

de coordenadas, 241
estacionario, 346
fila, 141
invariante, 346
libre, 48
longitud, 72
magnitud, 72
norma, 71
normal, 103
nulo, 46
producto por escalar, 50
propio
de una transformación lineal, 364
de una matriz, 346
proyección ortogonal sobre un subespacio, 271
proyección ortogonal sobre un vector, 79
suma, 50
unitario, 72
Vector característico, 346
Vectores
canónicos, 47
coplanares, 111
directores del plano, 91
ortogonales, 78
paralelos, 51
perpendiculares, 78
Volumen de un paralelepípedo, 111

El contenido de este texto incluye los temas mínimos del Algebra Lineal de los ciclos de fundamentación de las carreras de Ciencias, Ingenierías y Economía. El orden y forma de presentación de los mismos es el resultado de varios años de experiencia de los autores revisando textos y dictando el curso de Álgebra Lineal de estos Programas Académicos de la Universidad del Valle. El énfasis del texto está dirigido a resaltar los conceptos básicos, sus caracterizaciones y sus relaciones matemáticas, haciendo siempre comentarios explícitos sobre la eficiencia y conveniencia de usar las caracterizaciones como algoritmos de cómputo, los cuales deben ser objeto de estudio de otros cursos como Análisis Numérico.

El primer capítulo introduce los sistemas de ecuaciones lineales, con base en la idea intuitiva que de estos tienen los estudiantes, y formaliza un método de solución de los mismos (Eliminación de Gauss más Sustitución hacia atrás), enfatizando en los criterios de existencia y número de soluciones, sin calcularlas, lo cual servirá como elemento de cálculo y análisis para entender mejor los conceptos y ejemplos del resto de capítulos.

El segundo capítulo introduce los vectores de R^n y sus propiedades como un preámbulo de los principales conceptos en el estudio de los espacios vectoriales; además, presenta las nociones de recta, plano e hiperplano como una aplicación de estos conceptos a la geometría analítica básica, haciendo énfasis a los caso del plano y el espacio.

El tercer capítulo presenta en forma detallada los conceptos básicos del algebra de matrices de tal forma que sirva como otro ejemplo en el estudio de los espacios vectoriales en general, lo cual es presentado en el capítulo cuatro que es el centro teórico del texto. Los capítulos cinco y seis presentan un estudio básico de las transformaciones lineales, y de los valores y vectores propios.

La presentación de los conceptos, sus caracterizaciones y relaciones están siempre rodeadas de comentarios y ejemplos para facilitar su comprensión. Al final de cada capítulo, se presenta un resumen de términos introducidos en el mismo seguido de una serie de ejercicios propuestos, los cuales el lector debe estar en capacidad de resolver con la teoría presentada en el capítulo. Intencionalmente, no se incluyen aplicaciones de la teoría presentada ya que para su verdadera comprensión se requiere el conocimiento básico del área de aplicación. Tampoco se incluyen respuestas de los ejercicios para evitar que el lector trabaje buscando las mismas en detrimento del procedimiento.

Universidad del Valle

Programa Editorial

ISBN: 978-958-765-094-5